

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Θέματα-Ενδεικτικές Λύσεις

Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

17 Μαΐου 2010

ΘΕΜΑ Α.

- A1.** Έστω $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_\nu - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

- A2.** Αν $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

- A3.** Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικού αριθμούς, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

- β)** Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- γ)** Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f'(t_0)$.

- δ)** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

- ε)** Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}.$$

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

B3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ.

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
$[0, \dots)$	...	20
$[\dots, \dots)$	6	40
$[\dots, \dots)$	...	45
$[\dots, \dots)$	...	30
$[\dots, \dots)$	...	25
ΣΥΝΟΛΟ	-	160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4.

Μονάδες 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

A: " η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά".

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right].$$

ΘΕΜΑ Δ.

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A).$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 με τιμή $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

Μονάδες 5

Ενδεικτικές Απαντήσεις**ΘΕΜΑ Α.**

- A1.** Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 93 του σχολικού βιβλίου.
- A2.** Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 87 του σχολικού βιβλίου.
- A3.** *Βέβαιο ενδεχόμενο*, λέγεται το ενδεχόμενο το οποίο περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος (για παράδειγμα το Ω).
Αδύνατο ενδεχόμενο, λέγεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος (για παράδειγμα το $\emptyset$).
- A4.** α) Σωστό.
β) Λάθος.
γ) Σωστό.
δ) Λάθος.
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β.

- B1.** Για $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \\ &= 1.\end{aligned}$$

- B2.**

$$f'(x) = (2\sqrt{x^2 - x + 1})' = 2 \frac{(x^2 - x + 1)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Άρα, ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο $(0, f(0))$ είναι $f'(0) = -1$.

- B3.** Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = f'(0) = -1$ και επειδή $0 \leq \omega < 180^\circ$, έπεται ότι $\omega = 135^\circ$.

ΘΕΜΑ Γ.

- Γ1.** Η πρώτη κλάση είναι $[0, c)$ και η δεύτερη $[c, 2c)$. Αφού το κέντρο της δεύτερης κλάσης είναι 6, έπεται ότι

$$\frac{c + 2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4.$$

- Γ2.** Για $c = 4$,

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
$[0, 4)$	2	20
$[4, 8)$	6	40
$[8, 12)$	10	45
$[12, 16)$	14	30
$[16, 20)$	18	25
ΣΥΝΟΛΟ	-	160

Για την μέση τιμή,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{1600}{160} = 10.$$

Για την διακύμανση

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{\nu} = \frac{4000}{160} = 25.$$

Οπότε, η τυπική απόκλιση

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5.$$

- Γ3.** Ο συντελεστής μεταβολής

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 50\% > 10\%,$$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

- Γ4.** Για την απάντηση του ερωτήματος, υποθέτουμε ότι τα στατιστικά δεδομένα είναι κατανεμημένα ομοιόμορφα σε κάθε κλάση.

Αναζητούμε λοιπόν το πλήθος των παρατηρήσεων που αντιστοιχούν στο διάστημα $[7, 14] = [7, 8) \cup [8, 12) \cup [12, 14]$.

Στο $[7, 8)$ αντιστοιχεί το $\frac{1}{4}$ των παρατηρήσεων που αντιστοιχούν στη κλάση $[4, 8)$, δηλαδή 10 παρατηρήσεις.

Στο $[8, 12)$ αντιστοιχούν 45 παρατηρήσεις.

Στο $[12, 14]$ αντιστοιχεί το $\frac{1}{2}$ των παρατηρήσεων, δηλαδή 15 παρατηρήσεις.

Άρα στο $[7, 14] = [7, 8) \cup [8, 12) \cup [12, 14]$, αντιστοιχούν συνολικά 70 παρατηρήσεις. Οπότε, $N(A) = 70$. Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, $(N(\Omega) = 160)$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16} = 43,75\%.$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Για $x > P(A)$, είναι

$$f'(x) = \frac{1}{x - P(A)} - (x - P(A)) = \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)}.$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - (x - P(A))^2 = 0 \iff x = P(A) + 1 \text{ ή } x = P(A) - 1.$$

Η ρίζα $x = P(A) - 1$ απορρίπτεται, αφού από υπόθεση $x > P(A)$.

Αφού $x - P(A) > 0$, το πρόσημο της $f'(x)$, καθορίζεται από το πρόσημο του (τριωνύμου) $1 - (x - P(A))^2 = -x^2 + 2P(A)x + 1 - P(A)^2$, (λαμβάνοντας υπόψη ότι $P(A) - 1 < 0 \leq P(A) \leq 1 \leq P(A) + 1$).

Προκύπτει λοιπόν ότι

για $P(A) < x < P(A) + 1$, $f'(x) > 0$, οπότε η $f(x)$ γνησίως αύξουσα και

για $P(A) + 1 < x$, $f'(x) < 0$, οπότε η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα.

Στο $x = P(A) + 1$, η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το

$$f(P(A) + 1) = P(B) - \frac{1}{2}.$$

Δ2. Από τα συμπεράσματα του ερωτήματος Δ1 και από τις υποθέσεις του ερωτήματος Δ2, έπεται ότι

$$\frac{5}{3} = P(A) + 1 \text{ και } P(B) - \frac{1}{2} = f(P(A) + 1) = 0, \text{ οπότε,}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2}.$$

Δ3. Από τον προσθετικό νόμο προκύπτει ότι

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}.$$

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B είναι το $(A \cap B)'$. Οπότε,

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- Δ4.** Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα. Οπότε,

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$