Πανελλαδικες Εξετασεις Γ Λυκειου
Μαθηματικα Κατεύθυνσης

Θέματα-Ενδεικτικές Λύσεις

Νικόλαος Δ. Κατσίπης

16 Μαΐου 2011

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι

$$f'(x_0) = 0.$$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

β) Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - x/\text{συν}x = 0$ ισχύει $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = 1$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $\mathrm{x'Oy'}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $\mathrm{z} \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$|\mathrm{z} - 3i| + |\overline{\mathrm{z}} + 3i| = 2 \text{ και } \mathrm{w} = \mathrm{z} - 3i + \frac{1}{\mathrm{z} - 3i}.$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z} + 3i = \dfrac{1}{z - 3i}$.

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι $|z - w| = |z|$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$e^x\big(f'(x) + f''(x) - 1\big) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \text{συν}x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

ι) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ιι) $\dfrac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}\mathrm{dt}$

ιιι) $\dfrac{1 - g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}\mathrm{dt}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f(\frac{1}{x})}.$$

Μονάδες 5

Δ4. Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)\mathrm{dt}$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Μονάδες 7

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Η απάντηση βρίσκεται στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

Α3. **α)** Σωστό.
β) Σωστό.
γ) Λάθος.
δ) Λάθος.
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Είναι $|\overline{z}+3i| = |\overline{z-3i}| = |z-3i|$.
Άρα,

$$|z-3i| + |\overline{z}+3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z-3i| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z-(0+3i)| = 1.$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$. Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + (y-3)^2 = 1$.

Β2. Για $z \neq 3i$ είναι

$$|z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot(\overline{z-3i}) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z-3i)\cdot(\overline{z}+3i) = 1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i = \frac{1}{z-3i}.$$

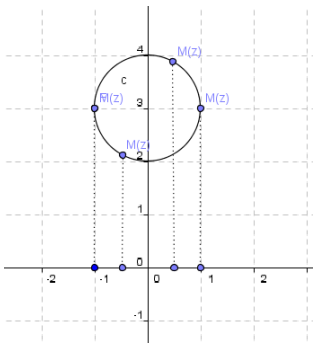
Β3. Είναι

$$w = z - 3i + \frac{1}{z-3i} \underset{B2}{=} z - 3i + \overline{z} + 3i = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z).$$

Άρα ο w είναι πραγματικός.
Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $w = z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2x$.
Όμως η εικόνα του z κινείται στο κύκλο με εξίσωση $x^2 + (y-3)^2 = 1$.
Άρα, $0 \leq (y-3)^2 = 1 - x^2$. Οπότε,

$$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2.$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι τιμές του πραγματικού μέρους του z, καθώς η εικόνα του κινείται στο κύκλο με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.



B4. Είναι

$$|z - w| = |z - (z + \overline{z})| = |-\overline{z}| = |\overline{z}| = |z|.$$

Ένας άλλος τρόπος είναι ο παρακάτω

$$\begin{aligned}|z - w|^2 &= (z - w)(\overline{z - w}) = (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) = \\ &= |z|^2 - (z + \overline{z}w + w^2) \overset{w=z+\overline{z}}{=} |z|^2 - w^2 + w^2 = |z|^2.\end{aligned}$$

Οπότε, $|z - w| = |z|$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}&e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow \\ &e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow \\ &(e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))' \Leftrightarrow \\ &e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c_1,\end{aligned}$$

όπου c_1 πραγματική σταθερά.

Για $x = 0$

$$e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1,$$

από το οποίο έπεται ότι $c_1 = -1$.
Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow (e^x - x)f'(x) = e^x - 1. \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$g'(x) = e^x - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Επίσης, για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$. Άρα, στο $x = 0$ η $g(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 1$.

Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x) \geq 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x - x \geq 1 > 0$.

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από την σχέση (1)

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \ln(e^x - x) + c_2, \text{ όπου } c_2 \text{ πραγματική σταθερά.}$$

Για $x = 0$

$$f(0) = \ln(e^0 - 0) + c_2,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $c_2 = 0$.

Οπότε,

$$f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επίσης, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, οπότε

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ελάχ.	$\nearrow$	

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Θα μελετήσουμε το πρόσημο της $f''(x)$. Αφού $(e^x - x)^2 > 0$ για κάθε $x > 0$ αρκεί να μελετήσουμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$h(x) = 2e^x - xe^x - 1, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = e^x(1-x)$.
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$, οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	μεγ.	$\searrow$	

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, άρα

$$h(\Delta_1) = (\lim_{x\to-\infty} h(x), \;\; h(1)] = (-1, \;\; e-1],$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}(2e^x - 1) = 0 - 1 = -1.$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \left(\text{Ισχύουν οι προυποθέσεις του κανόνα De L Hospital}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$, υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$, μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.
Επίσης, η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$, άρα

$$h(\Delta_2) = (\lim_{x\to+\infty} h(x), \;\; h(1)] = (-\infty, e-1],$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\Big(2 - x - \frac{2}{e^x}\Big) = +\infty.$$

Επειδή, $0 \in h(\Delta_2)$, υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$, μοναδικό αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2, τέτοιο ώστε $h(x_2) = 0$.
Για το πρόσημο της h, συμπεραίνουμε τα εξής

- Για κάθε $x \in (-\infty, x_1)$, έχουμε ότι $h(x) < h(x_1)$, αφού h γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1) \subseteq \Delta_1$.
  Άρα, $h(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, x_1)$.
- Για κάθε $x \in (x_1, 1)$, έχουμε ότι $h(x_1) < h(x)$, αφού h γνησίως αύξουσα στο $(x_1, 1) \subseteq \Delta_1$.
  Άρα, $h(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_1, 1)$.
- Για κάθε $x \in (1, x_2)$, έχουμε ότι $h(x) > h(x_2)$, αφού h γνησίως φθίνουσα στο $(1, x_2) \subseteq \Delta_2$.
  Άρα, $h(x) > 0$, για κάθε κάθε $x \in (1, x_2)$.

- Για κάθε $x \in (x_2, +\infty)$, έχουμε ότι $h(x) < h(x_2)$, αφού h γνησίως φθίνουσα στο $(x_2, +\infty) \subseteq \Delta_2$.
  Άρα, $h(x) < 0$, για κάθε $x \in (x_2, +\infty)$.

Έχουμε λοιπόν το παρακάτω πίνακα προσήμου της $h(x)$ και κατά συνέπεια και της $f''(x)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$h(x)$		-	0	+	0	-	
$f''(x)$		-	0	+	0	-	

Προκύπτει λοιπόν ότι η f έχει ακριβώς 2 σημεία καμπής.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = \ln(e^x - x) - \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η k είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$k(0) = -1 < 0$

και

$k(\frac{\pi}{2}) = \ln(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) > 0$, αφού από το Γ2 η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Οπότε, $k(0)k(\frac{\pi}{2}) < 0$.

Ισχύουν λοιπόν οι προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano, άρα η εξίσωση $k(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - x) = \text{συν}x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Όμως, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $k'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} + \text{ημ}x > 0$, άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = 1 - e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} \mathrm{dt}.$$

Θέτουμε

$$u = x + t \Leftrightarrow t = u - x,$$

άρα $\mathrm{du} = \mathrm{dt}$.

Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = -x$ είναι $u = 0$.

Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + e^{2x} \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} \mathrm{du} = 1 + e^{2x} \int_0^x \frac{e^{2u} e^{-2x}}{g(u)} \mathrm{du} =$$
$$= 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} \mathrm{du}.$$

Η συνάρτηση $\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών, οπότε η $\int_0^x \dfrac{e^{2u}}{g(u)}\mathrm{d}u$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Άρα η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων, με

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Όμοια βρίσκουμε ότι

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}\ x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x)g(x) = e^{2x} \text{ και } g'(x)f(x) = e^{2x}.$$

Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \underset{f(x),g(x)>0}{\Longleftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \Big(\ln f(x)\Big)' = \Big(\ln g(x)\Big)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = g(0) = 1$ οπότε

$$\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Δ2. Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = g(x)$ και $f'(x)g(x) = e^{2x}$, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow \big(f^2(x)\big)' = \big(e^{2x}\big)'$$
$$\Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ είναι $f^2(0) = e^0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.
Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) = e^{2x}$.
Επειδή, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Δ3. Για $x < 0$ είναι

$$\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{1}{x}=t}{=} \frac{e^{-t}}{t}.$$

Για $x \to 0^-$ έχουμε ότι $t \to -\infty$.
Άρα,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{t\to -\infty} \frac{e^{-t}}{t} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \left(\text{Ισχύουν οι προυποθέσεις του κανόνα De L Hospital}\right)$$
$$= \lim_{t\to -\infty} (-e^{-t}) = -\infty.$$

Δ4. Το εμβαδόν είναι $\mathrm{E} = \int_0^1 |F(x)|\mathrm{dx}$.
Θα μελετήσουμε το πρόσημο της F στο $[0,1]$.
Είναι $f(t^2) = e^{t^2} > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$

$$\int_x^1 e^{t^2}\mathrm{dt} \geq 0,$$

οπότε

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)\mathrm{dt} = -\int_x^1 e^{t^2}\mathrm{dt} \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Οπότε,

$$\mathrm{E} = \int_0^1 |F(x)|\mathrm{dx} = \int_0^1 -F(x)\mathrm{dx} = -\int_0^1 (x)'F(x)\mathrm{dx} = \left(\text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες}\right)$$
$$= -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xF'(x)\mathrm{dx} = -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{dx} =$$
$$= -[xF(x)]_0^1 + \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = -1F(1) + 0F(0) + \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$$

<u>Σχόλιο:</u>
Ένας διαφορετικός τρόπος για να το πρόσημο της F.
Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $F'(x) = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x < 1$ είναι $F(x) < F(1) = 0$.