# Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β′ Λυκείου
# Βασικό Τυπολόγιο Διανυσμάτων

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

3 Δεκεμβρίου 2012

**Συντεταγμένες Διανύσματος:** Αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ , τότε:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1).$$

**Γραμμικός Συνδιασμός Διανυσμάτων:** $\overrightarrow{u} = \kappa\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε: $\overrightarrow{u} = (\kappa\mathrm{x}_1 + \lambda\mathrm{x}_2, \kappa\mathrm{y}_1 + \lambda\mathrm{y}_2)$.

**Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος:** Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Τότε:

- αν O σημείο αναφοράς,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

- αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$,

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right).$$

**Μέτρο Διανύσματος:** Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τότε: $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$.

**Απόσταση 2 σημείων:** Αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε:

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}.$$

**Τριγωνική Ανισότητα:** $\left||\overrightarrow{\alpha}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| \leq \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| \leq |\overrightarrow{\alpha}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$.

**Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος:** Αν $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ και $\theta$ η γωνία που διαγράφει ο άξονας $\mathrm{x'x}$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, τότε:

$$\lambda_{\overrightarrow{\alpha}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \text{εφ}\theta,\ \mathrm{x} \neq 0.$$

**Εσωτερικό Γινόμενο:** Έχουμε ότι:

- $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = |\overrightarrow{\alpha}| \cdot \left|\overrightarrow{\beta}\right| \cdot \text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right)$.
- αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε:

$$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_1\mathrm{y}_2.$$

- $\overrightarrow{\alpha}^2 = |\overrightarrow{\alpha}|^2$.
- $\overrightarrow{\alpha} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{\beta}\right) = (\lambda \overrightarrow{\alpha}) \cdot \overrightarrow{\beta} = \lambda \left(\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}\right)$.
- $\overrightarrow{\alpha} \cdot \left(\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}\right) = \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\gamma}$.

**Ομόρροπα-Αντίρροπα Διανύσματα:** Αν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$, τότε:

- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} = \lambda \overrightarrow{\beta},\ \lambda > 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} = \lambda \overrightarrow{\beta},\ \lambda < 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{\alpha}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = |\overrightarrow{\alpha}| \cdot \left|\overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \left||\overrightarrow{\alpha}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| = \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = -|\overrightarrow{\alpha}| \cdot \left|\overrightarrow{\beta}\right|$.

**Ίσα Διανύσματα:** Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\beta} \\ \text{και} \\ |\overrightarrow{\alpha}| = |\overrightarrow{\beta}| \end{cases}$ ή

αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

**Αντίθετα Διανύσματα:** Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \\ \text{και} \\ |\overrightarrow{\alpha}| = |\overrightarrow{\beta}| \end{cases}$

ή αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$

**Παραλληλία:** Αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1$ και $\lambda_2$ αντίστοιχα, τότε:

- $\overrightarrow{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} = \lambda \overrightarrow{\beta},\ \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- $\overrightarrow{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

**Καθετότητα:** Αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1$ και $\lambda_2$ αντίστοιχα, τότε:

- $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

**Συνημίτονο Γωνίας:** Αν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$, τότε:

$$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right) = \frac{\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}}{|\overrightarrow{\alpha}| \cdot \left|\overrightarrow{\beta}\right|}.$$

**Προβολή:** Αν $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$, τότε:

- $\text{προβ}_{\overrightarrow{\alpha}} \overrightarrow{\beta} = \lambda \overrightarrow{\alpha}, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{\alpha}} \overrightarrow{\beta}$.