

# Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου

## Συντεταγμένες -Εσωτερικό Γινόμενο

### Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

14 Δεκεμβρίου 2012

1. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 4)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(3, 1)$ .
  - (α) Να βρείτε τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AG}$  και  $\overrightarrow{BG}$ .
  - (β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  ορίζουν τρίγωνο.
  - (γ) Να βρείτε τα  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\overrightarrow{AG}|$  και  $|\overrightarrow{BG}|$ .
  - (δ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις πλευρές του.
  - (ε) Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να βρείτε το  $|\overrightarrow{AM}|$ .
  - (ς) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{AM}$ .
2. Έστω τα σημεία  $A(-1, 2\kappa)$ ,  $B(\kappa - 1, 2 + \kappa)$  και  $\Gamma(\kappa, \kappa + 3)$ , όπου  $\kappa$  πραγματικός αριθμός.
  - (α) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  να είναι συνευθειακά.
  - (β) Να αποδείξετε ότι για  $\kappa = 1$ , το σημείο  $B$  είναι το μέσο του τμήματος  $AG$ .
3. Έστω τα σημεία  $A(2, 1)$  και  $B(5, 2)$ . Να βρείτε σημείο  $M$  του άξονα  $x'x$ , τέτοιο ώστε:
  - (α) το τρίγωνο  $AMB$  να είναι ισοσκελές με κορυφή το  $M$ ,
  - (β) το τρίγωνο  $AMB$  να είναι ορθογώνιο με  $\widehat{M} = 90^\circ$ ,
  - (γ) το τρίγωνο  $AMB$  να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κορυφή το  $M$ .
4. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  τέτοια, ώστε:
 
$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 3 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Αν  $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ , να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{u}$ .
5. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-3, -1)$ ,  $\vec{u} = (-2, 1)$  και  $\vec{v} = (1, -3)$ .
  - (α) Να εκφράσετε το  $\vec{\alpha}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .
  - (β) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος  $\vec{u}$  πάνω στο  $\vec{\alpha}$ .
  - (γ) Να βρείτε διάνυσμα το οποίο να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$  και να έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του  $\vec{\alpha}$ .

6. Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \text{ και } \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8).$$

(α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$ .

(β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\kappa$  ώστε τα διανύσματα  $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ , να είναι κάθετα.

(γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .

7. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ , για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 1, \quad |\vec{\gamma}| = 2 \text{ και } \vec{\alpha} + 5\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

(α) Να βρείτε τα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ .

(β) Να βρείτε τα  $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ,  $\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$  και  $\text{συν}(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ .