

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

10 Φεβρουαρίου 2013

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} = 4 & (\gamma) \sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}) = 2 \\ (\beta) \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 5 & (\delta) \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} = 4\sqrt{2}. \end{array}$$

2. Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \sqrt{\alpha^2 \beta^2} & (\gamma) \sqrt[4]{\alpha^4 \beta^8} \\ (\beta) \sqrt{\alpha^4 \beta^4} & (\delta) \sqrt[6]{\alpha^{12} \beta^6}. \end{array}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} & (\delta) \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[20]{5} = 5 \\ (\beta) \sqrt{25\sqrt{5\sqrt{5}}} = 5 \cdot \sqrt[8]{5^3} & (\epsilon) \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^8} = 8 \\ (\gamma) \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{3^5} & (\zeta) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{32} = 4. \end{array}$$

4. Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) A = \sqrt{x - 1} & (\gamma) \Gamma = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x} \\ (\beta) B = \sqrt{2 - x} & (\delta) \Delta = \sqrt{x^2 + 1}. \end{array}$$

5. (α) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(2 + \sqrt{5})^2 \text{ και } (2 - \sqrt{5})^2.$$

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 4.$$

6. Δίνεται η παράσταση

$$\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} > 0$.

(β) Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα: $\left(\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}\right)^2$.

(γ) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{21 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = 6$.

7. Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$(α) \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$$

$$(β) \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}}$$