

# Άλγεβρα Α' Λυκείου

## Εξίσωση 2ου Βαθμού

### Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

28 Φεβρουαρίου 2013

### Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ , έχει ρίζα τον αριθμό 1.
2. Αν  $\rho$  ρίζα της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ , να αποδείξετε ότι το  $-\rho$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $ax^2 - \beta x + \gamma = 0$ .
3. Αν  $\alpha\gamma < 0$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες οι οποίες είναι και ετερόσημες.
4. Δίνεται η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  και  $\Delta \geq 0$ . Να δειχθεί ότι:
  - (α) οι ρίζες της είναι αντίθετες αν και μόνον αν  $\beta = 0$
  - (β) οι ρίζες της είναι αντίστροφες αν και μόνον αν  $\alpha = \gamma$ .
5. Να βρείτε όλες τις εξισώσεις β' βαθμού που το άθροισμα των ριζών τους είναι ίσο με το γινόμενό τους.

### Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)  $-x^2 + 3x - 2 = 0$

(δ)  $x^2 + 3 = 0$

(β)  $x^2 - 25 = 0$

(ε)  $(3 - 2x)^2 + 1 = 2x$

(γ)  $x^2 + x = 0$

(ς)  $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ .

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ , οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρητές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε.

(α)  $x^2 + \alpha x - 2\alpha^2 = 0$

(β)  $x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = 0$ .

3. Αν η εξίσωση

$$\lambda x^2 + \frac{\lambda^2}{2}x - 2\lambda + 1 = 0,$$

έχει ρίζα τον αριθμό  $x = 2$ , να βρείτε

- (α) την τιμή του  $\lambda$ ,  
 (β) την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

**4.** Αν  $x_1, x_2$  οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 3 = 0$ , να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων, χωρίς να υπολογίσετε τα  $x_1, x_2$ .

- (α)  $x_1 + x_2$ , (δ)  $x_1^2 + x_2^2$ ,  
 (β)  $x_1 x_2$ , (ε)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$   
 (γ)  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ , (ς)  $x_1^3 + x_2^3$ .

**5.** Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς:

- (α)  $-2$  και  $5$  (β)  $3 - 2\sqrt{3}$  και  $3 + 2\sqrt{3}$ .

**6.** Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 3 = 0$ , να βρείτε τις εξισώσεις 2ου βαθμού με ρίζες τα ζεύγη

- (α)  $2x_1$  και  $2x_2$ , (γ)  $x_1^2$  και  $x_2^2$   
 (β)  $3x_1 - 5$  και  $3x_2 - 5$ , (δ)  $\frac{1}{x_1}$  και  $\frac{1}{x_2}$ .

**7.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, 2 πραγματικούς αριθμούς με

- (α) άθροισμα 21 και γινόμενο 110, (β) άθροισμα 2 και γινόμενο -2.

**8.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + (2 - \lambda)x - \lambda^2 - 1 = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε  $\lambda$ . της εξίσωσης είναι αντίθετες.  
 (γ) Υπάρχει  $\lambda$ , για το οποίο οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίστροφες;  
 (β) Να βρείτε το  $\lambda$  για το οποίο οι ρίζες

**9.** Έστω η εξίσωση

$$-x^2 - \lambda x + 8 = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .  
 (β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε να είναι  $x_1 = -2x_2$ .

**10.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

- (α)  $(x + 1)^2 - |x + 1| - 2 = 0$  (δ)  $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$   
 (β)  $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$  (ε)  $|x^2 + x + 1| = 1$   
 (γ)  $\frac{x + 5}{x^2 - x} - \frac{x + 5}{x - 1} = \frac{1}{x}$  (ς)  $|x^2 - 3x| = |x - 3|$   
 (ζ)  $|x^2 - 2x| = x - 2$ .