

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου

Κύκλος

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

8 Μαρτίου 2013

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $C : x^2 + y^2 - 12x + 10y = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon : x + 2y - 6 = 0$.

2. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C .

(β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(γ) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σημείο $A(\mu, 1 - \mu)$ ανήκει στον κύκλο C .

3. Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$ και ο κύκλος

$$C : x^2 + y^2 = 1.$$

(α) Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C .

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που άγονται από το σημείο A .

4. Δίνεται η ευθεία $\epsilon : y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία

(α) να τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία,

(β) να εφάπτεται του κύκλου,

(γ) να μην έχει κοινά σημεία με το κύκλο.

5. (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο στην ευθεία $x + y = 5$ και διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(4, 1)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

6. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $\epsilon : y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $\epsilon : 2x + 3y - 6 = 0$.

8. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$. Να βρείτε :

- (α) το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου,
- (β) την εξίσωση της ευθείας OK , όπου O η αρχή των αξόνων,
- (γ) τα σημεία A και B του κύκλου C τα οποία απέχουν από την αρχή των αξόνων ελάχιστη και μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

9. Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \text{ και } C_2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

- (α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.
- (γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (A, B) , όπου A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα A, B απέχουν την μικρότερη απόσταση.
- (δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) , όπου Γ στον C_1 και Δ στον C_2 , με τη μεγαλύτερη απόσταση.

10. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$x^2 + y^2 - x - 2 + 5\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda = 0,$$

είναι εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (β) Να βρείτε το κέντρο του παραπάνω κύκλου και να αποδείξετε ότι αυτό ανήκει σε μια ευθεία, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

11. Να βρείτε το μήκος της κοινής χορδής των κύκλων

$$C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ και } C_2 : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$