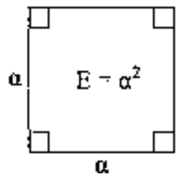
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΜΒΑΔΩΝ

<u>ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ</u>

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$, δηλαδή:

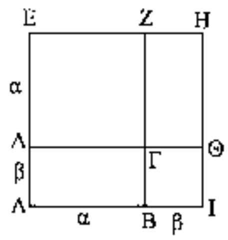
$$\mathbf{Ε = α^2.}$$



<u>ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ</u>

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

$$\mathbf{Ε = α \cdot β}$$



Απόδειξη: Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=α, την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$(ΑΙΗΕ) = (α + β)^2$ (1).

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(ΔΓΖΕ)=α^2,\ (ΒΙΘΓ) = β^2 \text{ και } (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) \qquad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(ΑΙΗΕ) = (ABGD) + (GUHZ) + (BIUG) + (DGZE),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

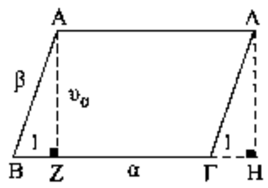
$$(α + β)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + α^2 + β^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση (ΑΒΓΔ) = α • β.

<u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ</u>

Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

$$\mathbf{Ε = αυ_α = βυ_β}\ ,$$



Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ)=ΒΓ • ΑΖ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($Ζ = Η= 90°$, ΑΒ = ΔΓ και $Β_1 = Γ_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) (1).

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ), οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

$$(ΑΒΓΔ)=(ΑΖΗΔ)=ΑΔ \cdot ΑΖ= ΒΓ \cdot ΑΖ,$$

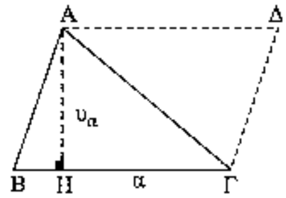
που είναι το ζητούμενο.

ΤΡΙΓΩΝΟ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

i)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_{\beta} = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_{\gamma} \ .$$



Απόδειξη

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = \alpha \bullet \upsilon_\alpha \qquad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) \qquad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ)+ (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \bullet \upsilon_\alpha = 2(ΑΒΓ) \text{ ή } (ΑΒΓ) = 12\ \alpha \bullet \upsilon_\alpha \ .$$

ii)

$$\mathbf{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Απόδειξη

$$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

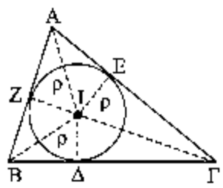
$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$$

$$= \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,.$$

iii)

$$\mathbf{E} = \tau\rho$$

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

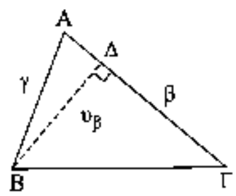
$$E = (ΑΒΓ) = (ΙΒΓ) + (ΙΓΑ) + (ΙΑΒ)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho.$$

iv)

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \ ,$$

α



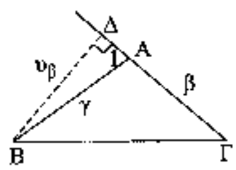
Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι βγ = $2R\upsilon_\alpha$ (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι υ_α = βγ2R και με αντικατάσταση στον τύπο Ε = 12 $\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει το ζητούμενο.

v)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu \Gamma \ .$$

β



Απόδειξη

Αν Α β= γ • ημΑ.

Αν Α > 1∟, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ. 17β) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_\beta = \gamma \bullet \eta\mu A_{\varepsilon\xi} = \gamma \bullet \eta\mu(180° - A) = \gamma \bullet \eta\mu A.$$

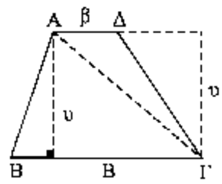
Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε υ_β=γ • ημΑ οπότε

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu\mathrm{A} \ .$$

Όταν Α = 1∟ , τότε $\upsilon_\beta = \gamma$, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.
Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

<u>ΤΡΑΠΕΖΙΟ</u>

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.



$$\mathrm{E} = \frac{(\mathrm{B} + \beta)}{2} \cdot \upsilon \ ,$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρ απέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

Ε = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) (1).

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

(ΑΒΓ) = 12 Β • υ και (ΑΒΔ) = 12 β • υ (2),

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι Ε = Β+β2 • υ, δηλαδή το ζητούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ

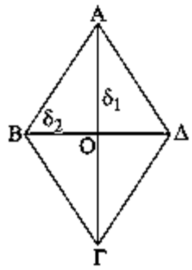
Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

<u>ΡΟΜΒΟΣ</u>

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

Απόδειξη

Είναι φανερό (σχ.12) ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) (1). Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:



$$(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{B\Delta} \cdot \mathrm{AO} = \frac{1}{2}\delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2 \ \ \text{και} \ \ (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2 \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι Ε = 12 δ1 • δ2