

Γενικά Επαναληπτικά Θέματα

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

29 Απριλίου 2013

Στόχος του παρόντος φυλλαδίου είναι να αποτελέσει μια αφορμή για επανάληψη πριν τις εξετάσεις. Να προσπαθήσετε να λύσετε τα παρακάτω θέματα, εφόσον πρώτα έχετε μελετήσει τη θεωρία και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου και των σημειώσεων σας.
Σας εύχομαι καλό διάβασμα και... καλό Πάσχα!

- Θέμα 1ο.** (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|6x - 3|}{3} + 2 = 2|2x - 1|$.
(β) Αν α είναι η θετική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α), να λύσετε την ανίσωση: $|1 - x| < \alpha$.

- Θέμα 2ο.** (α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 12 < 7x$.
(β) Αν ο x είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α), να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση: $|x - 3| - |x - 4| - 2|x|$.

- Θέμα 3ο.** (α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $x^2 - 2x + 1$.
(β) Να γράψετε χωρίς τη ρίζα την παράσταση: $A = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.
(γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{5}{3} - \frac{A}{3} < \frac{4 - A}{2}.$$

- Θέμα 4ο.** (α) Να βρείτε τις ρίζες των τριωνύμων: $2x^2 - 5x + 3$ και $x^2 - x$.
(β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - x}$ και ύστερα να απλοποιήσετε τον τύπο της.
(γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με τεταγμένη ίση με 2.

- Θέμα 5ο.** (α) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 - 81x = 0$.
(β) Αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^5 - 81x = 0$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha} + 1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha} - 1} = \sqrt{\alpha}.$$

- Θέμα 6ο.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2$.

Θέμα 7ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + x}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Θέμα 8ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8 - |1 - x|}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(-4)}{f(4) - f(-4)} + \frac{f(4)}{f(4) + f(-4)} = 4$.

Θέμα 9ο. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{4}}$.

(γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 < 2.$$

Θέμα 10ο. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες.

(β) Για $\lambda = 1$,

(β1) να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης,

(β2) να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $2x_1$ και $2x_2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β1).

Θέμα 11ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{x-5}$.

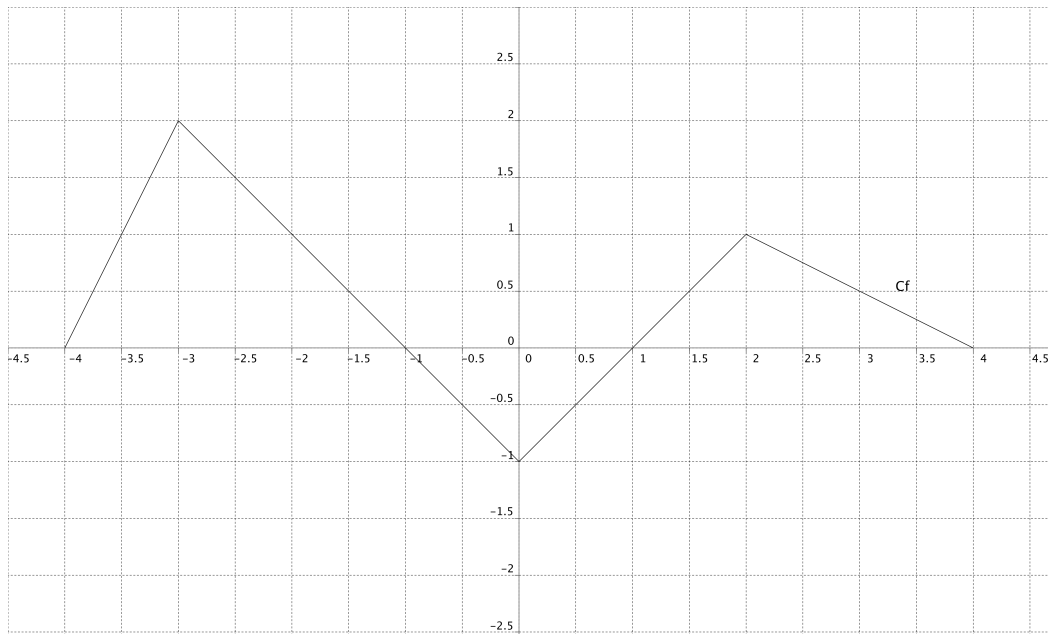
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

$$A(4, 0), B(7, 4), \Gamma\left(8, \frac{6\sqrt{2} + 1}{3}\right).$$

(γ) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{f(6)} \cdot \sqrt{f(6) - 2} = 2$.

Θέμα 12ο. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- (γ) Να βρείτε τις τιμές: $f(-3)$, $f\left(-\frac{5}{2}\right)$, $f(0)$ και $f(1)$.
- (δ) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ και $f(x) = -2$.
- (ε) Να λύσετε τις ανισώσεις: $f(x) > 0$ και $f(x) > 1$.

Θέμα 13ο. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x) = x - 9 \text{ και } f(x) = x^2 - 4x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (α) Αν το σημείο $M(1, -8)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να υπολογίσετε την τιμή του α .
- (β) Αν $\alpha = -5$, να βρείτε:
 - (β1) τα κοινά σημεία των C_f και C_g ,
 - (β2) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

Θέμα 14ο. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε η γραφική παράσταση της f έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα x' , για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
- (β) Αν x_1, x_2 οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον x' , να βρείτε την τιμή του λ ώστε $x_1 + x_2 = 3$.
- (γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.