Γενικά Επαναληπτικά Θέματα

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

25 Απριλίου 2013

Στόχος του παρόντος φυλλαδίου είναι να αποτελέσει μια αφορμή για επανάληψη πριν τις εξετάσεις. Να προσπαθήσετε να λύσετε τα παρακάτω θέματα, εφόσον πρώτα έχετε μελετήσει τη θεωρία και τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου και των σημειώσεων σας.
Σας εύχομαι καλό διάβασμα και... καλό Πάσχα!

Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν. (Ευκλείδης)

Θέμα 1ο. Οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\alpha = 14$, $\beta = 15$ και $\gamma = 13$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της ΑΜ στην ΒΓ.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Θέμα 2ο. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 4$, $\beta = 7$ και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

(α) Να υπολογίσετε την πλευρά γ και να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ (ως προς τις γωνίες του).

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $7\sqrt{3}$.

(γ) Να υπολογίσετε τις ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(δ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου μ_α.

Θέμα 3ο. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 20$, $\beta = 28$ και $\gamma = 12$.

(α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ είναι αμβλεία.

(β) Να βρεθεί η προβολή της πλευράς γ στην πλευρά α.

(γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$.

Θέμα 4ο. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 7\mathrm{cm}$ και $\gamma = 5\mathrm{cm}$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Ε με ΑΜ= $\sqrt{21}\mathrm{cm}$, τότε να υπολογίσετε το μήκος

(α) της πλευράς α του τριγώνου, **(β)** του τμήματος ΜΕ.

Θέμα 5ο. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $\mathrm{R} = 8\mathrm{cm}$ και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}$. Να βρείτε:

(α) το πλήθος των πλευρών του,

(β) το απόστημά του,

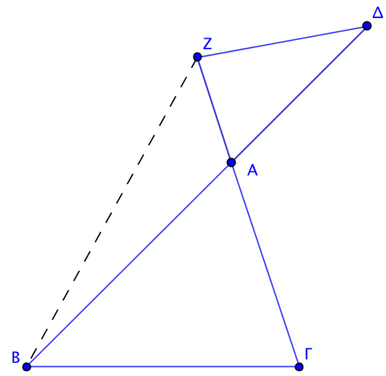
(γ) το εμβαδόν του.

Θέμα 6ο. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν $\mathrm{E} = 84\mathrm{cm}^2$ και περίμετρο $\Pi = 42\mathrm{cm}$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ, προς το μέρος του Α, παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Ζ έτσι ώστε ΑΔ$=\frac{3}{4}$ΑΒ και ΑΖ$=\frac{1}{3}$ΑΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι (ΑΔΖ)$= 21\mathrm{cm}^2$ και (ΑΒΖ)$= 28\mathrm{cm}^2$.

(β) Να βρείτε την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (O, ρ) του τριγώνου ΑΒΓ.

(γ) Αν $\rho = 4\mathrm{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (O, ρ) και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, ρ).



Θέμα 7ο. Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ$= 15\mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε

(α) την ακτίνα R του κύκλου,

(β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R),

(γ) το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ,

(δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

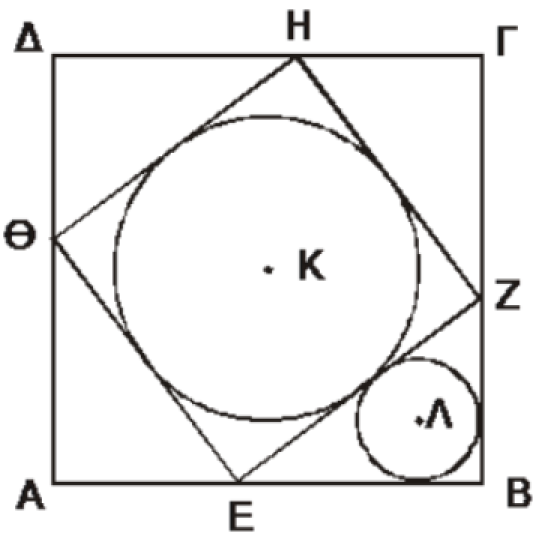
Θέμα 8ο. Στο διπλανό σχήμα, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $7\mathrm{cm}$, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι ώστε

ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = $3\mathrm{cm}$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι $\rho = 1\mathrm{cm}$.

(γ) Εάν (K, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (K, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ).



Θέμα 9ο. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ=ΟΔ και φέρουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{M\Delta}^2 = \mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta B}$,

(β) $\mathrm{M\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma E} = \mathrm{M\Delta} \cdot \mathrm{\Delta Z} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{O\Delta}^2$,

γ) $\mathrm{M\Gamma}^2 + \mathrm{M\Delta}^2 = 2(\mathrm{R}^2 + \mathrm{O\Delta}^2)$,

(δ) $\dfrac{\mathrm{M\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}} + \dfrac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{\Delta Z}} = 2\dfrac{\mathrm{R}^2 + \mathrm{O\Delta}^2}{\mathrm{R}^2 - \mathrm{O\Delta}^2}$.

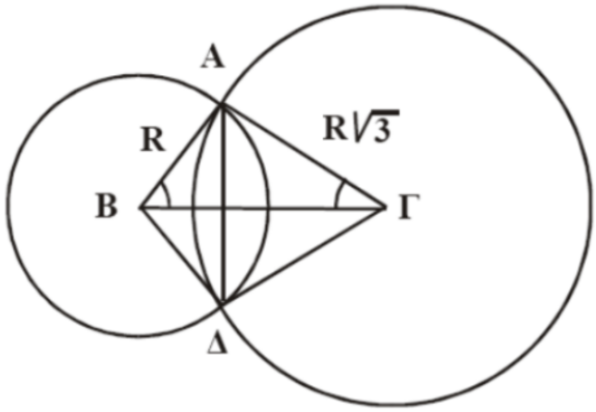
Θέμα 10ο. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\mathrm{A}} = 90^o)$ με μήκη πλευρών ΑΒ$=\mathrm{R}$ και ΑΓ$=\mathrm{R}\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (Β,R) και (Γ,R). Να υπολογίσετε

(α) το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R,

(β) τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R,

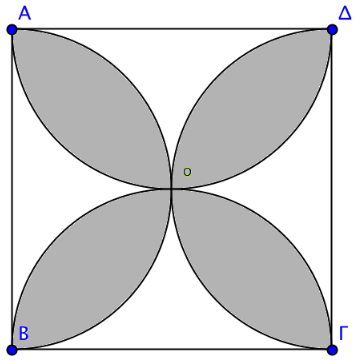
(δ) το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.



Θέμα 11ο. Με διαμέτρους τις πλευρές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, με ΑΒ$=\alpha$, γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρείτε:

(α) την περίμετρο του τετράφυλλου που σχηματίζεται (ως συνάρτηση του α),

(β) το εμβαδόν του τετράφυλλου χωρίου (ως συνάρτηση του α).



Θέμα 12ο. Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια, ώστε η γωνία $\widehat{\Gamma \mathrm{B} x}$ να είναι 30^o. Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βx στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{R}$

(β) $\dfrac{(\mathrm{PB\Gamma})}{(\mathrm{PA\Gamma})} = 4$

(γ) $\mathrm{P\Gamma} = \dfrac{2\mathrm{R}\sqrt{3}}{3}$.