Επαναληπτικά Θέματα Εξετάσεων

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

19 Απριλίου 2013

Στόχος του παρόντος φυλλαδίου είναι να αποτελέσει μια αφορμή για επανάληψη πριν τις εξετάσεις. Σας εύχομαι καλό διάβασμα και... καλό Πάσχα!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.
2. Αν $\frac{\pi}{2} < (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) < \pi$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.
3. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
4. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
5. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
6. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
7. Η ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \Gamma = 0$, με $\mathrm{A} \neq 0$ ή $\mathrm{B} \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mathrm{B}, -\mathrm{A})$.
8. Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 5$ και $y = -1$ είναι κάθετες.
9. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\,(\alpha, \beta)$ και είναι παράλληλη στον $\mathrm{x'x}$ έχει εξίσωση $\mathrm{x} = \alpha$.
10. Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση $\mathrm{y} = \lambda\mathrm{x}$.
11. Οι ευθείες $\mathrm{y} = 2$ και $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}$ είναι παράλληλες.
12. Η ευθεία $\epsilon : \mathrm{y} = \kappa^2\mathrm{x} + 2$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$, σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $\mathrm{x'x}$.
13. Αν $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \Gamma = 0$, παριστάνει ένα μόνο σημείο.
14. Έστω η παραβολή με εξίσωση $\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{px}$. Η απόσταση της διευθετούσας από την εστία της παραβολής ισούται με $|\mathrm{p}|$.
15. Η έλλειψη $\mathrm{C} : \frac{\mathrm{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta > 0$ έχει εστίες $\mathrm{E}\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0\right)$, $\mathrm{E'}\left(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0\right)$.

2ο Θέμα

Θέμα 2.1 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{2\pi}{3}$. έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β) Να υπολογίσετε το $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(γ) Να υπολογίσετε το συν $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

(δ) Να υπολογίσετε το $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

Θέμα 2.2 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 9)$.

(α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, αν $4\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

(β) Αν $\vec{\gamma} = (1, 1)$ να βρεθεί η γωνία $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

(γ) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (4, -11)$ σαν γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(δ) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(ε) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{\beta}$.

Θέμα 2.3 Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(-3, 2)$ και $\Gamma(1, -3)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

(γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB.

Θέμα 2.4 Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(-2, 3)$ και $\Gamma(4, -1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διάμεσος AM του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει το ύψος $\mathrm{A}\Delta$ του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

(δ) Να βρείτε την μεσοκάθετο της πλευράς AB.

Θέμα 2.5 Έστω (ϵ) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(4, 0)$ και $\mathrm{B}(0, 4)$ και (δ) η ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι κάθετη στην (ϵ).

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $x + y = 4$.

(β) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ).

(γ) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών (δ) και (ϵ).

(δ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ.

3ο Θέμα

Θέμα 3.1 Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : 4x + \lambda y + \lambda - 2 = 0.$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

(α) $\varepsilon_1 \parallel y'y$ **(β)** $\varepsilon_1 \parallel x'x$ **(γ)** $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ **(δ)** $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Θέμα 3.2 Δίνεται η εξίσωση

$$(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Ύστερα να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση διέρχονται από σταθερό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4, 1)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\eta : -x + y + 1 = 0$ δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών της παραπάνω εξίσωσης.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση ε_2 που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και είναι κάθετη στην $\eta : -x + y + 1 = 0$.

Θέμα 3.3 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 3x - 6y + 2 = 0$$

(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες ε_1 και ε_2.

(β) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

(γ) Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.

Θέμα 3.4 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση

$$\mathrm{C} : (x - 1)^2 + y^2 = 2.$$

(α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta : y = x + 1$.

(β) Να εξετάσετε ποια από τις ευθείες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι εφαπτομένη του κύκλου

$$\mathrm{C}' : (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Θέμα 3.5 Δίνεται η παραβολή: $\mathrm{C} : \mathrm{y} = 4\mathrm{x}^2$. Να βρείτε

(α) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής,

(β) την εξίσωση της εφαπτομένης η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 2013$.

Θέμα 3.6 Δίνεται κύκλος C : $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο M$(2, 4)$.

α) Να βρείτε την σχετική θέση του M$(2, 4)$ ως προς τον κύκλο C.

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του C, ε_1 και ε_2, οι οποίες διέρχονται από το M$(2, 4)$.

(γ) Να υπολογισθεί η γωνία των ε_1 και ε_2.

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής, A και B, των εφαπτομένων με τον κύκλο.

(ε) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο A και από το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $y'y$.

Θέμα 3.7 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0.$$

(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β) Να δείξετε ότι το M(4,-2) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

(γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B ώστε το M να είναι το μέσο του AB.

4ο Θέμα

Θέμα 4.1 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

(β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων του προηγούμενου ερωτήματος.

(γ) Για $\lambda = -1$, να βρεθεί

(γ1) η εξίσωση του κύκλου C_1,

(γ2) η θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$ ως προς τον κύκλο C_1.

Θέμα 4.2 Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να αποδείξετε ότι

(α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του,

(β) κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους) και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A,

(γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας με εξίσωση $x+y-1=0$ στο σημείο Α.

Θέμα 4.3 Δίνεται η εξίσωση
$$(x-1)(x-3)+(y-3)(y-5)=0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β) Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy τα σημεία $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(3,3)$, $\Gamma(3,5)$ και $\Delta(1,5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

(γ) Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του προηγούμενου ερωτήματος, οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου Κ για κάθε χρονική στιγμή t, $\mathrm{t}>0$ είναι $(\mathrm{t},\mathrm{t}+2)$, να βρείτε αν η γραμμή, στην οποία κινείται το αυτοκίνητο Κ , συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία;

Θέμα 4.4. Δίνεται η εξίσωση
$$x^2+y^2-2+\lambda(x-y+2)=0, \text{ όπου } \lambda\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ διαφορετικό από το 2 και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β) Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση για $\lambda=2$.

(γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1).

(δ) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

(ε) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon: -x+y=2$.

Θέμα 4.5 Δίνεται η έλλειψη $\mathrm{C}:\dfrac{\mathrm{x}^2}{25}+\dfrac{\mathrm{y}^2}{9}=1$ και η εφαπτομένη ε σε τυχαίο σημείο της $\Pi(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)$. Η κάθετη στην ε στο Π τέμνει τους άξονες $\mathrm{x'x}$, $\mathrm{y'y}$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{M}(\mathrm{u},\mathrm{v})$ είναι το μέσο του τμήματος $\mathrm{K}\Lambda$, τότε:

(α) να εκφραστούν τα u, v συναρτήσει των x_1, y_1,

(β) να αποδειχθεί ότι το M ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρεθούν οι εστίες και η εκκεντρότητα.