

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Η Έννοια του Μιγαδικού Αριθμού

Πράξεις στο σύνολο $\mathbb{C}$

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

2 Οκτωβρίου 2013

1. Έστω $z = \frac{2+i}{1-i}$. Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z + \frac{1}{z}$.
2. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει ότι: $1 + 2\sqrt{2}i = 3 \frac{1+xi}{1-xi}$.
3. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z) = 3$ και $\operatorname{Im}(z) = -1$, να βρείτε τα $\operatorname{Re}(z^2)$ και $\operatorname{Im}(z^2)$.
4. Αν $z \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι:
 - (α) $z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$ ή $\operatorname{Im}(z) = 0$
 - (β) $z^2 \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ ή $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$.
5. Αν z φανταστικός αριθμός με $z \neq -i$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z^3 - i}{z + i}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.
6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:
 - (α) $(1+i)^{20\nu} = (1-i)^{20\nu}$
 - (β) $\left(\frac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{4\nu} + \left(\frac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{4\nu} = 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1 - i^{\nu+1}}{1 - i}.$$
8. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $z^2 + w^2 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$z^{2014} + w^{2014} = 0.$$

9. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{1\}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $z^3 = 1$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $\frac{1}{z_1^2 + z_1}$

(β) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{1 + z_1 z_2}$

(γ) $z_1^{2014} + \frac{1}{z_1^{2014}}$

10. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z\bar{z} = 1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z^2 + 1}{z}$ είναι πραγματικός.

11. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq -2$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , αν ο μιγαδικός αριθμός

$$w = \frac{z}{z + 2},$$

είναι

(α) πραγματικός,

(β) φανταστικός.

12. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και

$$w = (1 + i)z + 2\bar{z} + 3.$$

Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon : y = 2x - 1,$$

να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει στην ευθεία

$$\varepsilon' : y = -x + 5.$$