

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Συναρτήσεις Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

24 Οκτωβρίου 2013

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(α') f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\ln(x-1)}$$

$$(γ') f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x-1}}$$

$$(β') f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(δ') f(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$. Να βρείτε:

(α') το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ,

(β') τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,

(γ') τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 2 \\ x^2 - 6, & x < 2 \end{cases}$

(α') Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 είναι τιμή της συνάρτησης f .

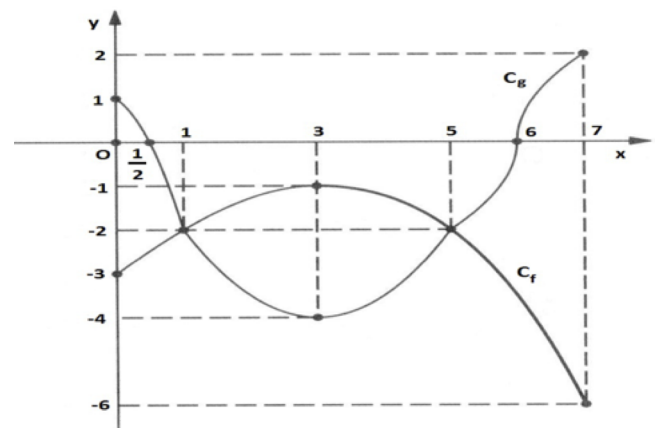
(β') Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε το σημείο $M(1, \lambda)$, να ανήκει στη C_f .

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .

(β') Να επιλύσετε γραφικά τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

- i. $f(x) = 0$
- ii. $g(x) = 0$
- iii. $f(x) = g(x)$
- iv. $g(x) > 0$
- v. $f(x) < -2$
- vi. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) < 1$



(γ') Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες ως προς x .

5. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$(\alpha') f(x) = \ln x + 1$$

$$(\delta') f(x) = |\ln x|$$

$$(\zeta') f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 3 \\ 4 - x, & x < 3 \end{cases}$$

$$(\beta') f(x) = \ln(x + 1)$$

$$(\epsilon') f(x) = \ln \frac{1}{x}$$

$$(\eta') f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(\gamma') f(x) = \ln(x - 1)$$

$$(\varphi') f(x) = \ln(-x)$$

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2} \right)$.

(α') Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

(β') Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς β , έτσι ώστε η ευθεία $y = 2x + \beta$ να τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε δύο διαφορετικά σημεία.

8. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln |x| - \ln |x - 1| \text{ και } g(x) = \ln \frac{x}{x - 1}.$$

Να εξετάσετε αν $f = g$. Στην περίπτωση που $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$, με $x \neq 2$.

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$.

(β') Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$, με $x \geq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in [0, 4]$.

11. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$(\alpha') g(x) = f(x + 1)$$

$$(\beta') h(x) = f(x^2)$$

12. Να βρείτε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x να ισχύει:

$$f(1 - x) = x^2 - x + 1.$$