

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου
Μονότονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση
Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1 Νοεμβρίου 2013

1. (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
(β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x - x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- (α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
(β') Αν $0 < \alpha < 1$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

3. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 13)$ και $B(7, 11)$, τότε:

- (α') να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f ,
(β') να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x) - 6) < f(7) + 2.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + x, \quad x > 0.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
(β') Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + \ln x < x$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f(f(x)) = 4x + 3.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
(β') Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) = f(x+1)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3) - f(2x^2 - x) = 0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$.

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

(γ) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, -2)$.

(α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$.

(β) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f .

(γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x - 1) + 2 < 0$.

(ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = 2$.

(ς) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(-2)$.

(ζ) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2 + f^{-1}(x + 2)) = 2$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$(f(x))^3 + f(x) = x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$.

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

10. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε η $f \circ g$ να είναι $1 - 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.

(β) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι:

$$g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2),$$

να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Εξετάσεις 2002 Ενιαίου Λυκείου)