Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β′ Λυκείου
Βασικό Τυπολόγιο Διανυσμάτων

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

4 Νοεμβρίου 2013

Συντεταγμένες Διανύσματος: Αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$, $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1).$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων: $\overrightarrow{u} = \kappa\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε: $\overrightarrow{u} = (\kappa \mathrm{x}_1 + \lambda \mathrm{x}_2, \kappa \mathrm{y}_1 + \lambda \mathrm{y}_2)$.

Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος: Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Τότε:

- αν O σημείο αναφοράς,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

- αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$,

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right).$$

Μέτρο Διανύσματος: Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τότε: $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$.

Απόσταση 2 σημείων: Αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε:

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}.$$

Τριγωνική Ανισότητα: $\left||\overrightarrow{\alpha}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| \leq \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| \leq |\overrightarrow{\alpha}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$.

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος: Αν $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ και θ η γωνία που διαγράφει ο άξονας $\mathrm{x}'\mathrm{x}$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, τότε:

$$\lambda_{\overrightarrow{\alpha}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \varepsilon\varphi\theta,\ \mathrm{x} \neq 0.$$

Εσωτερικό Γινόμενο: Έχουμε ότι:

- $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = |\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right| \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right)$.
- αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε:

$$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_1\mathrm{y}_2.$$

- $\overrightarrow{\alpha}^2 = |\overrightarrow{\alpha}|^2$.
- $\left|\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}\right| \leq |\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}\right)^2 \leq \overrightarrow{\alpha}^2\overrightarrow{\beta}^2$.
- $\overrightarrow{\alpha}\cdot\left(\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{\gamma}\right) = \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\gamma}$.
- $\overrightarrow{\alpha}\cdot\left(\lambda\overrightarrow{\beta}\right) = (\lambda\overrightarrow{\alpha})\cdot\overrightarrow{\beta} = \lambda\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}\right)$.

Ίσα Διανύσματα: Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \upuparrows \overrightarrow{\beta} \\ \text{και} \\ |\overrightarrow{\alpha}| = |\overrightarrow{\beta}| \end{cases}$ ή

αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε: $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 \\ \text{και} \\ \mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2 \end{cases}$

Αντίθετα Διανύσματα: Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \\ \text{και} \\ |\overrightarrow{\alpha}| = |\overrightarrow{\beta}| \end{cases}$

ή αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε: $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_1 = -\mathrm{x}_2 \\ \text{και} \\ \mathrm{y}_1 = -\mathrm{y}_2 \end{cases}$

Παραλληλία (Ομόρροπα-Αντίρροπα): Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) \neq \overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2) \neq \overrightarrow{0}$,

- $\overrightarrow{\alpha} \upuparrows \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} = \lambda\overrightarrow{\beta},\ \lambda > 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} = \lambda\overrightarrow{\beta},\ \lambda < 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \| \mathrm{x}'\mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{y}_1 = 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \| \mathrm{y}'\mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{x}_1 = 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \upuparrows \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{\alpha}| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\overrightarrow{\alpha} \upuparrows \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} = |\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \left||\overrightarrow{\alpha}| - \left|\overrightarrow{\beta}\right|\right| = \left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right|$.
- $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} = -|\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right|$.
- Αν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \nparallel \mathrm{y}'\mathrm{y}$ τότε $\overrightarrow{\alpha} \| \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ αντίστοιχα.
- $\overrightarrow{\alpha} \| \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}_1\mathrm{y}_2 - \mathrm{x}_2\mathrm{y}_1 = 0$.

Καθετότητα: Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε:

- $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} = 0$.
- $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.

Συνημίτονο Γωνίας: Αν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$, τότε συν$\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}}{|\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right|}$.

Προβολή: Αν $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$, τότε:

- προβ$_{\overrightarrow{\alpha}}\overrightarrow{\beta} = \lambda\overrightarrow{\alpha}, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha}\cdot$ προβ$_{\overrightarrow{\alpha}}\overrightarrow{\beta}$.