

# Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου

## Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

### Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

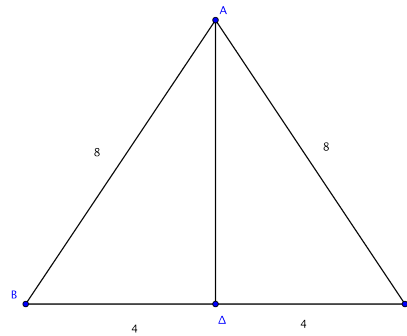
22 Νοεμβρίου 2013

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

(α)  $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$

(β)  $\vec{AF} \cdot \vec{DB}$

(γ)  $\vec{FA} \cdot \vec{AD}$



2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{6}$ ,  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$  και  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ .  
Να βρείτε:

(α)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(δ)  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

(β)  $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$

(ε)  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

(γ)  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

(ς)  $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

3. (α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$$

(β) Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 1$ , να αποδείξετε ότι  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}$ .

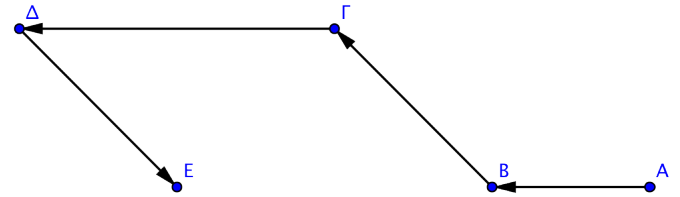
4. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3 \text{ και } \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{2}.$$

Αν  $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ , να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{u}$ .

5. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος ισχύει ότι:  
 $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ ,  $\vec{BG} = \vec{\beta}$ ,  $\vec{\Gamma\Delta} = 2\vec{\alpha}$  και  
 $\vec{\Delta\epsilon} = -2\vec{\beta}$ .

να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{A\Gamma}$   
 και  $\vec{\Gamma\epsilon}$  είναι μεταξύ τους κάθετα.



- (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα  $\vec{A\epsilon}$ ,  
 $\vec{A\Gamma}$  και  $\vec{\Gamma\epsilon}$  συναρτήσει των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

- (β) Αν ισχύει ότι  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ ,

6. Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \text{ και } \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$ .

- (β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\kappa$  ώστε τα διανύσματα  $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ , να είναι μεταξύ τους κάθετα.

- (γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .

7. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A (-1, 1), B (1, 5) και Γ (4, -4).

- (α) Να εξετάσετε αν η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία ή αμβλεία.

- (β) Να βρείτε τη γωνία  $\hat{B}$ .

8. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-3, -1)$ ,  $\vec{u} = (-2, 1)$  και  $\vec{v} = (1, -3)$ .

- (α) Να εκφράσετε το  $\vec{\alpha}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .

- (β) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος  $\vec{u}$  πάνω στο  $\vec{\alpha}$ .

- (γ) Να βρείτε διάνυσμα το οποίο να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$  και να έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του  $\vec{\alpha}$ .

9. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ , για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = 2 \text{ και } \vec{\alpha} + 5\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

- (α) Να βρείτε τα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ .

- (β) Να βρείτε τα  $\text{syn}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$ ,  $\text{syn}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}})$  και  $\text{syn}(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})$ .

- (γ) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ .