

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Συνέχεια Συνάρτησης Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

9 Δεκεμβρίου 2013

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$|f(x)| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε:

(α) να βρείτε την τιμή $f(0)$,

(β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f^2(x_0) = f(x_0) - x_0.$$

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2.$$

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(4)$ και η συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x+2)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h .

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = f(\xi + 2).$$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.
Αν $\alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 5$ και

$$f(f(x)) + f(x) = 20, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(5) = 15$

(β) $f(10) = 10$.

8. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

9. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 2xf(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν $f(0) = 1$, να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f , να αποδείξετε ότι:

(α) $m \leq \frac{\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta)}{\alpha + \beta} \leq M$,

(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta)}{\alpha + \beta}.$$

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 1 - x - \ln x, \quad x > 0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x}$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2014)e^x = 1$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.