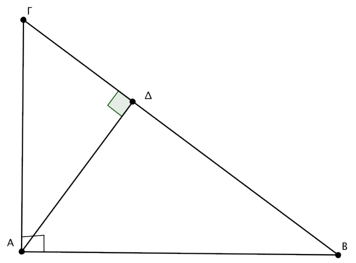
Γεωμετρία Β′ Λυκείου
Μετρικές Σχέσεις
Θεωρία-Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

16 Δεκεμβρίου 2013

Συνοπτική Θεωρία

- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με οξεία γωνία 30^o η απέναντι πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.
- Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.
- Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ με $\alpha > \beta > \gamma$, είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνο αν $\alpha < \beta + \gamma$.
- Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντίστροφα.
- ***Μετρικές Σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο:***



1. $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}$
2. $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma\Delta}$
3. $\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{\Delta B} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}$
4. $\dfrac{1}{\mathrm{A\Gamma}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{AB}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{A\Delta}^2}$
5. $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2$
   (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

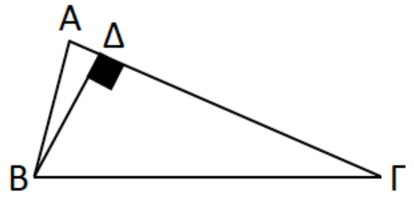
- ***Αντίστροφο του Πυθαγορείου:*** Αν σε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει ότι $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2$, τότε $\widehat{\mathrm{A}} = 1_{\llcorner}$.

- ***Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος:***

  ▷ *Αν* $\widehat{\mathrm{A}} < 90^{o}$, τότε:

  $$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta},$$

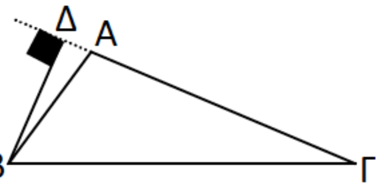
  όπου $\mathrm{A\Delta}$ είναι η προβολή της πλευράς γ στην πλευρά β.



  ▷ *Αν* $\widehat{\mathrm{A}} > 90^{o}$, τότε:

  $$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta},$$

  όπου $\mathrm{A\Delta}$ είναι η προβολή της πλευράς γ στην πλευρά β.



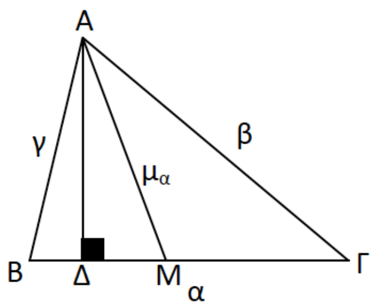
- Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει:

  1. $\alpha^2 > \beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν $\widehat{\mathrm{A}} > 1_{\llcorner}$
  2. $\alpha^2 < \beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν $\widehat{\mathrm{A}} < 1_{\llcorner}$
  3. $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν $\widehat{\mathrm{A}} = 1_{\llcorner}$

Σχόλιο: Βρίσκουμε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του ελέγχοντας τη σχέση που έχει το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

- ***Νόμος Συνημιτόνων:*** Σε κάθε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot$συν$\mathrm{A}$.

- ***Θεωρήματα Διαμέσων:***



  ▷ 1ο *θεώρημα διαμέσων:*

  $$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

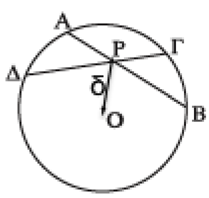
  ▷ 2ο *θεώρημα διαμέσων:* Αν $\beta > \gamma$ τότε

  $$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \mathrm{M\Delta},$$

  όπου $\mathrm{M\Delta}$ είναι η προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά α.

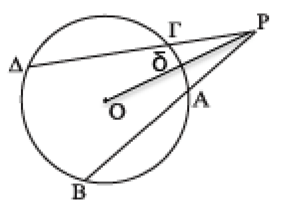
- **Μετρικές σχέσεις σε κύκλο** (O, R):

αν P εσωτερικό σημείο του κύκλου



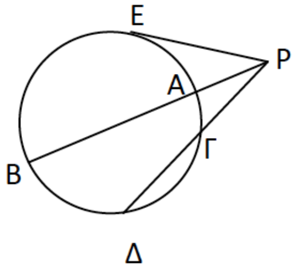
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{P\Gamma}\cdot\mathrm{P\Delta} = \mathrm{R}^2 - \delta^2$$

αν P εξωτερικό σημείο του κύκλου



$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{P\Gamma}\cdot\mathrm{P\Delta} = \delta^2 - \mathrm{R}^2$$

Αν ΡΕ εφαπτόμενο τμήμα



$$\mathrm{PE}^2 = \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{P\Gamma} \cdot \mathrm{P\Delta} = \delta^2 - \mathrm{R}^2.$$

- **Δύναμη του σημείου** P **ως προς τον κύκλο** (O, R)

$$\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O,R})} = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{R}^2 = \delta^2 - \mathrm{R}^2.$$

Ισχύει ότι:

- $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O,R})} > 0$ αν και μόνο αν το σημείο Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου,
- $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O,R})} < 0$ αν και μόνο αν το σημείο Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου,
- $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O,R})} = 0$ αν και μόνο αν το σημείο Ρ είναι σημείο του κύκλου.

Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{o}}$ και ύψος ΑΔ.
Αν $\mathrm{AB} = 15$ και $\Delta\Gamma = 16$ να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων:

(α΄) ΒΔ (β΄) ΑΓ (γ΄) ΑΔ

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = 1$ και $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{3}$.
Να υπολογίσετε:

(α΄) τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ (β΄) τη διάμεσο μ_β.

3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 5$, $\gamma = 8$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 60^{\mathrm{o}}$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 7$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

(γ΄) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΓΔ της πλευράς ΑΓ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

(δ΄) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ.

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 6$, $\beta = 7$ και $\gamma = 5$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

(β΄) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς γ πάνω στην πλευρά α.

(γ΄) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου μ_α στην πλευρά ΒΓ.

5. Δίνεται ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με $\mathrm{AB} = 3$ και $\mathrm{A\Delta} = 2$. Αν προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΑΓ κατά ίσο τμήμα ΓΕ, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \dfrac{\gamma}{2}$ και $\mu_\gamma = \dfrac{\gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma$

(β΄) $\widehat{\Gamma} = 90^{\mathrm{o}}$.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του μ_α. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $\mathrm{\Gamma E} = \dfrac{\alpha}{2}$. Να αποδείξετε ότι

$$\mathrm{AE}^2 = 3\beta^2 + \gamma^2 - 3\mu_\alpha^2.$$

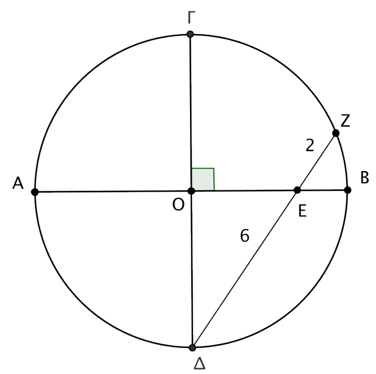
8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι ώστε $\mathrm{E\Gamma} = \dfrac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.
Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\mathrm{AE} = \dfrac{\sqrt{7}\alpha}{3}$

(β΄) $\mathrm{EZ} = \dfrac{2\sqrt{7}\alpha}{21}$.

9. Δίνεται κύκλος (O, R) και οι διάμετροι ΑΒ και ΓΔ, οι οποίες τέμνονται κάθετα. Αν η χορδή ΔΖ τέμνει την ΟΒ στο σημείο Ε, ώστε

$$\mathrm{EZ} = 2 \text{ και } \Delta\mathrm{E} = 6,$$



να βρείτε:

(α΄) την δύναμη του σημείο Ε ως προς τον κύκλο (O, R),

(β΄) την ακτίνα R του κύκλου.

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα !!!
2014 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος !!!