Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
Διαγώνισμα Α΄ Τετραμήνου

Θεματική Ενότητα: Όρια - Συνέχεια
Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

9 Δεκεμβρίου 2013

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $\mathrm{f}(\alpha) \neq \mathrm{f}(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $\mathrm{f}(\alpha)$ και $\mathrm{f}(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathrm{x}_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = \eta$.

Μονάδες 15

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Μονάδες 8

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**).

α) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \alpha^{\mathrm{x}} = 0$.

β) Αν $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \dfrac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})} = -\infty$.

γ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \left(\mathrm{x} \cdot \eta\mu\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right) = 1$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\mathrm{x} - 1}{\mathrm{x}} = 1$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \ln(\mathrm{x} + 1)$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\mathrm{x}_0 \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{e}^{\mathrm{x}_0} = \ln\frac{1}{\mathrm{x}_0 + 1}.$$

Μονάδες 15

Β3. Αν $\alpha \in (-1, \mathrm{x}_0)$ και $\beta \in (\mathrm{x}_0, +\infty)$, όπου x_0 ο πραγματικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\mathrm{f}(\alpha)}{1-\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{f}(\beta)}{\mathrm{x}-2} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.
Επίσης, ισχύει ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1} \dfrac{\mathrm{xf}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{\sqrt{\mathrm{x}^2+3} - 2\mathrm{x}} = 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(1) = -\dfrac{3}{2}$.

Μονάδες 15

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \big(\mathrm{f}(2014)\mathrm{x}^3 - 2013\mathrm{x} + 1\big)$.

Μονάδες 10

Σας εύχομαι επιτυχία!