

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Θεώρημα του Rolle - Θεώρημα Μέσης Τιμής

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

20 Ιανουαρίου 2014

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \sin x$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cos x = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$8\alpha x^3 + 9x^2 - 6x = 2\alpha,$$

έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + \kappa = 0$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 + 15x - 8 = 0$, έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - 4x - 1 = 0$, έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = c$ έχει τρία κοινά σημεία με την γραφική της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(3) - f(2) = 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$.

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) + 2014f(\xi) = 0$.

- 8.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$, με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

(α) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$,

(β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

- 9.** Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $xf(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $g(1) = 1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $N(\xi, g(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- 10.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

(β) $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

- 11.** Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) $f(x) + f(3x) > 2f(2x)$, για κάθε $x > 0$.

- 12.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f' είναι $1-1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτήν.