

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

29 Ιανουαρίου 2014

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = -2xf^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι $f(0) = 1$. Έστω g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) η g είναι σταθερή, (β) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f''(x) = 6x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 2, να βρείτε τον τύπο της f .
3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει ότι:

- $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν στο $x_0 = 1$ παράλληλες εφαπτομένες,
- $f(2) = g(2) - 3$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) αν η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 , τέτοιες ώστε $-1 < \rho_1 < 3 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μαι τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 0$, να βρείτε τον τύπο της f .

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) = x^2 f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Αν $f(1) = e$, να βρείτε τον τύπο της f .

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = 2f'(0) = 1$ και

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(β) $f^2(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$(x - 2)f'(x) = x^2 - 5x + 6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = 3$, να βρείτε τον τύπο της f .

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - e)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f^3(x) + 3f(x) = 3e^x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f'(x)(f^2(x) + 1) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(β) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(β) Να αποδείξετε ότι: $e^\pi > \pi^e$.

11. Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 + \ln(x + 1)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$ στο σημείο $A(\alpha, g(\alpha))$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln x$, να αποδείξετε ότι το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

(δ) Πόσες κοινές εφαπτομένες έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h ;