

# Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου

## Κύκλος

### Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

10 Φεβρουαρίου 2014

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(2, 3)$ .
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου  $C : x^2 + y^2 - 12x + 10y = 0$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\epsilon : x + 2y - 6 = 0$ .
3. Θεωρούμε τον κύκλο  $C : x^2 + y^2 + 4y = 0$  και το σημείο  $A(-1, -1)$ .  
Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο  $A$ .

4. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $C$ .

(β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου  $C$ .

(γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το σημείο  $A(\mu, 1 - \mu)$  ανήκει στον κύκλο  $C$ .

5. (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$  που έχει κέντρο στην ευθεία  $x + y = 5$  και διέρχεται από τα σημεία  $A(2, 3)$  και  $B(4, 1)$ .  
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C$  στο σημείο  $A$ .

6. Δίνεται το σημείο  $A(1, 2)$  και ο κύκλος

$$C : x^2 + y^2 = 1.$$

(α) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου  $C$ .

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C$  που άγονται από το σημείο  $A$ .

7. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  και η ευθεία  $\epsilon : y = x - 3$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου  $C$  και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
8. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$  οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία  $\epsilon : 2x + 3y - 6 = 0$ .
9. Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ . Να βρείτε:

- (α) το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου,  
 (β) την εξίσωση της ευθείας  $OK$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων,  
 (γ) τα σημεία  $A$  και  $B$  του κύκλου  $C$  τα οποία απέχουν από την αρχή των αξόνων ελάχιστη και μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

**10.** Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1 \text{ και } C_2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

- (α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο.  
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.  
 (γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων  $(A, B)$ , όπου  $A$  ανήκει στον  $C_1$  και το  $B$  στον  $C_2$ , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα  $A, B$  απέχουν την μικρότερη απόσταση.  
 (δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων  $(\Gamma, \Delta)$ , όπου  $\Gamma$  στον  $C_1$  και  $\Delta$  στον  $C_2$ , με τη μεγαλύτερη απόσταση.

**11.** Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x - 2y + 2 - \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό  $\lambda$  διαφορετικό από το 0 και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.  
 (β) Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση για  $\lambda = 0$ .  
 (γ) Για τις παραπάνω τιμές του  $\lambda$ , να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.  
 (δ) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  για τις οποίες ο κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στην ευθεία  $\epsilon : 4x - 3y + 1 = 0$ .

**12.** (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - x - 2 + 5\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ .

- (β) Να βρείτε το κέντρο του παραπάνω κύκλου και να αποδείξετε ότι αυτό ανήκει σε μια ευθεία, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .

**13.** Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4\lambda x - 4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 (β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.  
 (γ) Να βρείτε τον κύκλο που ορίζεται από την εξίσωση (1) και εφάπτεται στην ευθεία  $\epsilon : y = x - 2$ .