

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Κυρτότητα-Ασύμπτωτες-Κανόνας De L' Hospital

Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

21 Φεβρουαρίου 2014

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

- (α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Εξετάσεις 2004 Ενιαίου Λυκείου)

2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- (α) το x_0 είναι μοναδικό
- (β) το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της f .

3. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να παρουσιάζει σημείο καμπής και τοπικό ακρότατο στο ίδιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.
- (δ) Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3$.

5. (α) Δίνεται μια κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f σ' ένα διάστημα Δ . Για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

(β) Να αποδείξετε ότι:

- i. η συνάρτηση $g(x) = x \ln x$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$
- ii. $\alpha^\alpha \beta^\beta \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\alpha + \beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin x}{x^2}$$

$$(ε') \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x}$$

$$(ς') \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$$

$$(ζ) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (2 - x^2)$$

$$(δ) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$$

$$(η) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

7. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β .

9. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x+h)}{h} = f''(x)$$

$$(β) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x).$$