

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Ορισμένο Ολοκλήρωμα-Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

11 Μαρτίου 2014

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \quad \left(\text{αν. } 2 - \frac{5}{e} \right)$$

$$(\beta) \int_0^1 (x^2 - 1)e^{2x} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{1 - e^2}{4} \right)$$

$$(\gamma) \int_1^2 x \ln x dx \quad \left(\text{αν. } 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right)$$

$$(\delta) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \left(\text{αν. } 1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$(\epsilon) \int_0^\pi x \sin 2x dx \quad (\text{αν. } 0)$$

$$(\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \eta \mu x dx \quad \left(\text{αν. } -\frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 1 \right)$$

$$(\eta) \int_1^e \ln x dx \quad (\text{αν. } 1)$$

$$(\theta) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{1}{2} \right)$$

$$(\iota) \int_0^\pi e^x \sin x dx \quad \left(\text{αν. } -\frac{e^\pi + 1}{2} \right)$$

$$(\kappa) \int_0^\pi e^{-x} \eta \mu x dx \quad \left(\text{αν. } \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \right)$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu 4x dx \quad \left(\text{αν. } \frac{1}{2} \right)$$

$$(\beta) \int_1^2 2x e^{x^2+1} dx \quad (\text{αν. } e^5 - e^2)$$

$$(\gamma) \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad (\text{αν. } \ln 2)$$

$$(\delta) \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{1}{4} \right)$$

$$(\epsilon) \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx \quad (\text{αν. } 2\sqrt{2} - 2)$$

$$(\zeta) \int_0^4 \sqrt{2x + 1} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{26}{3} \right)$$

$$(\eta) \int_{-1}^0 x \sqrt{x + 1} dx \quad \left(\text{αν. } -\frac{4}{15} \right)$$

$$(\theta) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad \left(\text{αν. } \ln \frac{e + 1}{2} \right)$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon \phi x dx \quad (\text{αν. } \ln 2)$$

$$(\gamma) \int_1^e \ln^2 x dx \quad (\text{αν. } e - 2)$$

$$(\beta) \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx \quad \left(\text{αν. } \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$(\delta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(\epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x dx \quad \left(\text{αν. } \frac{2}{3} \right)$$

$$(\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma \upsilon \nu^3 x}{1 - \eta \mu x} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{5}{8} \right)$$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(\alpha) \int_1^2 \frac{2x^2 + x + 3}{x} dx \quad \left(\text{αν. } 4 + 3 \ln 2 \right)$$

$$(\upsilon) \int_{-1}^1 \frac{4}{x^2 - 4} dx \quad \left(\text{αν. } -2 \ln 3 \right)$$

$$(\beta) \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{7}{2} + \ln 2 \right)$$

$$(\delta) \int_2^3 \frac{x+3}{x^2+x-2} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4} \right)$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(\alpha) \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{1}{2} \right)$$

$$(\upsilon) \int_{-2}^1 \frac{x+4}{\sqrt{x+3}} dx \quad \left(\text{αν. } \frac{20}{3} \right)$$

$$(\beta) \int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx \quad \left(\text{αν. } 2e^2 \right)$$

$$(\delta) \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx \quad \left(\text{αν. } \ln \frac{4}{3} \right)$$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(\alpha) \int_{-1}^1 |x| dx \quad \left(\text{αν. } 1 \right)$$

$$(\beta) \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} |1 - \ln x| dx \quad \left(\text{αν. } 2e - \frac{3}{e} \right)$$

7. (α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$$

8. Έστω η παραγωγίσιμη και $1-1$ συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν είναι γνωστό ότι και η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha).$$