Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β′ Λυκείου
Βασικό Τυπολόγιο
Κωνικές Τομές

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

10 Μαρτίου 2014

Εξίσωση κύκλου:

- με κέντρο το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα ρ: $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\rho^2$
- με κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ και ακτίνα ρ: $(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2+(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)^2=\rho^2$.

Γενική μορφή εξίσωσης κύκλου:

$$\mathrm{x}^2+y^2+\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\Gamma=0,\ \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0,$$

με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}$.

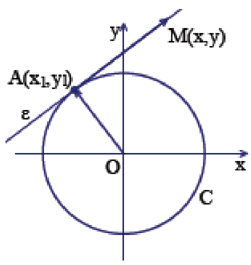
Εφαπτομένη κύκλου:

- Η εφαπτομένη του κύκλου

  $$\mathrm{C}:\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=\rho^2$$

  στο σημείο του $\mathrm{M}\left(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1\right)$ έχει εξίσωση:

  $$\epsilon:\mathrm{x}_1\mathrm{x}+\mathrm{y}_1\mathrm{y}=\rho^2.$$



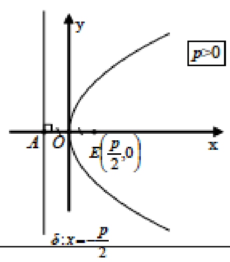
- Για την εφαπτομένη του κύκλου

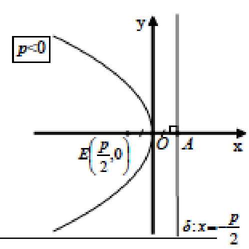
  $$\mathrm{C}:(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2+(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)^2=\rho^2,$$

  εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2 στη σελίδα 86 του σχολικού βιβλίου.

Παραβολή:

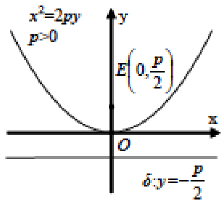
- *Με εστία στον άξονα* $\mathrm{x}'\mathrm{x}$*:*
  Η εξίσωση της παραβολής με εστία $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{p}}{2},0\right)$ και διευθετούσα δ : $\mathrm{x}=-\frac{\mathrm{p}}{2}$, έχει εξίσωση: $\mathrm{y}^2=2\mathrm{px}$.

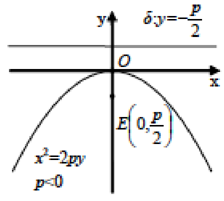




Η εφαπτομένη της παραβολής $\mathrm{C}: \mathrm{y}^2 = 2\mathrm{px}$ στο σημείο της $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ έχει εξίσωση: $\mathrm{y}_1\mathrm{y} = \mathrm{p}(\mathrm{x} + \mathrm{x}_1)$.

- *Με εστία στον άξονα* $\mathrm{y}'\mathrm{y}$*:*
  Η εξίσωση της παραβολής με εστία $\mathrm{E}\left(0, \frac{\mathrm{p}}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: \mathrm{y} = -\frac{\mathrm{p}}{2}$, έχει εξίσωση: $\mathrm{x}^2 = 2\mathrm{py}$.





Η εφαπτομένη της παραβολής $\mathrm{C}: \mathrm{x}^2 = 2\mathrm{py}$ στο σημείο της $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ έχει εξίσωση: $\mathrm{x}_1\mathrm{x} = \mathrm{p}(\mathrm{y} + \mathrm{y}_1)$.

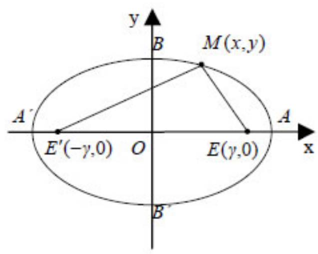
Έλλειψη:

- *Με εστίες στον άξονα* $\mathrm{x}'\mathrm{x}$*:*

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.



$$(ME) + (ME') = 2\alpha > (EE') = 2\gamma.$$

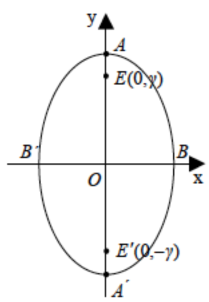
Η εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ έχει εξίσωση: $\frac{x_1\mathrm{x}}{\alpha^2} + \frac{y_1\mathrm{y}}{\beta^2} = 1$.

- *Με εστίες στον άξονα* $\mathrm{y}'\mathrm{y}$*:*

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E(0, \gamma)$, $E'(0, -\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1,$$

όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.



Η εφαπτομένη της έλλειψης $C: C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο σημείο της $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ έχει εξίσωση: $C: \frac{x_1\mathrm{x}}{\beta^2} + \frac{y_1\mathrm{y}}{\alpha^2} = 1$.

- Τα σημεία Α, Α′, Β, Β′ είναι οι κορυφές της έλλειψης.

- Ο Α΄Α είναι ο μεγάλος άξονας και ο Β΄Β ο μικρός άξονας της έλλειψης.
- Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A) = 2\alpha$ και το μήκος του μικρού άξονα είναι $(B'B) = 2\beta$. Η εστιακή απόσταση είναι (EE')=2γ.
- Εκκεντρότητα: $\epsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει ότι $\epsilon < 1$.

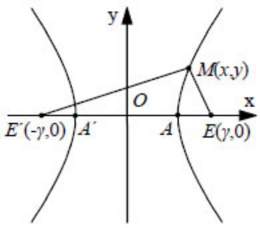
Υπερβολή:

- *Με εστίες στον άξονα* $\mathrm{x'x}$*:*

  Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ και σταθερή απόλυτη διαφορά 2α είναι

  $$C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

  όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.

  $|(ME) - (ME')| = 2\alpha < (EE') = 2\gamma.$

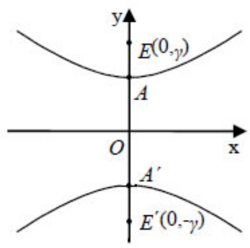
  Η εφαπτομένη της υπερβολής $C : \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ έχει εξίσωση: $\dfrac{x_1\mathrm{x}}{\alpha^2} - \dfrac{y_1\mathrm{y}}{\beta^2} = 1$.

- *Με εστίες στον άξονα* $\mathrm{y'y}$*:*

  Η εξίσωση της υπερβολήςμε εστίες $E(0, \gamma)$, $E'(0, -\gamma)$ και σταθερή απόλυτη διαφορά 2α είναι

  $$C : \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$$

  όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.

  Η εφαπτομένη της υπερβολής $C : \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ έχει εξίσωση: $\dfrac{y_1\mathrm{y}}{\alpha^2} - \dfrac{x_1\mathrm{x}}{\beta^2} = 1$.

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C : \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$, ενώ της $C : \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$, είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = \dfrac{\alpha}{\beta}x$ και $y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x$.
- Εκκεντρότητα: $\epsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει ότι $\epsilon > 1$.