

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

$$\text{Η Συνάρτηση } F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$$

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

18 Μαρτίου 2014

- 1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha') F_1(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 - 1} dt \quad (\beta') F_2(x) = \int_e^x \frac{t+1}{t-1} dt \quad (\gamma') F_3(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t}{\ln t} dt$$

- 2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha') G_1(x) = \int_2^{\ln x} \sqrt{t} dt \quad (\beta') G_2(x) = \int_2^{e^x} \frac{5}{t-1} dt \quad (\gamma') G_3(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{9-t^2} dt$$

- 3.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} (\alpha') H_1(x) &= \int_{x-2}^{x^2} \sqrt{t-1} dt & (\gamma') H_2(x) &= \int_x^{x+1} \ln t dt \\ (\beta') H_3(x) &= \int_{5-x}^{\ln x} \sqrt{t-1} dt & (\delta') H_4(x) &= \int_{x^2-1}^{2x-3} \sqrt{t^2-4} dt \end{aligned}$$

- 4.** Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2f(2x) - f(x+1) = 6x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha') \text{ η συνάρτηση } F(x) = \int_{x+1}^{2x} f(t)dt - 3x^2 - 2x \text{ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της,}$$

$$(\beta') \int_{-2}^1 f(t)dt = 9.$$

- 5.** Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_{x-1}^x \ln t dt$.

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F .

(β') Να μελετήσετε την συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

6. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(α) f(x) = 1 - \int_1^x f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (γ) xf(x) = 2 - \int_1^x \frac{tf(t)}{x}dt, \quad x > 0,$$

$$(β) f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t}f(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (δ) f(x) = e^x + \int_0^1 xf(xt)dt, \quad x > 0.$$

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και $f(x) > 7$ για κάθε $x \in [2, 3]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_2^x f(t)dt = 4x - 5$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

8. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \int_\alpha^\xi f(x)dx$.

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι

$$\int_1^x f(t)dt \geq e^{x^2} \ln x, \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

να αποδείξετε ότι $f(1) = e$.

10. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \eta \mu t dt}{x^2 \eta \mu x}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x x e^{t^2} dt}{x^2 - x}$$

11. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) = (x^2 + 1) \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{t^2 + 1} dt \right), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

(β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

12. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(tx) dt.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -2xf^2(x)$.

(β) Αν $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

(γ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x) \cdot \eta \mu 2x)$.

(Εξετάσεις 2001 Ενιαίου Λυκείου)