

Επαναληπτικά Θέματα Εξετάσεων

Καθηγητές:

Εμμανουήλ Καραμολέγκος

Νικόλαος Κατσιπίης

25 Απριλίου 2014

Στόχος του παρόντος φυλλαδίου είναι να αποτελέσει μια αφορμή για επανάληψη πριν τις εξετάσεις. Σας ευχόμαστε καλό διάβασμα και... καλό Πάσχα!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.
2. Αν $\frac{\pi}{2} < \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} < \pi$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.
3. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
4. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
5. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
6. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι: $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
7. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
8. Οι ευθείες με εξισώσεις $x = 5$ και $y = -1$ είναι κάθετες.
9. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$ και είναι παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση $x = \alpha$.
10. Η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση $y = \lambda x$.
11. Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες.
12. Η ευθεία $\epsilon : y = \kappa^2 x + 2$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$, σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
13. Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, παριστάνει ένα μόνο σημείο.
14. Έστω η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$. Η απόσταση της διευθετούσας από την εστία της παραβολής ισούται με $|p|$.

15. Η έλλειψη $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta > 0$ έχει εστίες $E(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$, $E'(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$.
16. Οποιοσδήποτε δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες είναι όμοιες.
17. Για την εκκεντρότητα ϵ μιας έλλειψης ισχύει ότι $0 < \epsilon < 1$.
18. Η υπερβολή $C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, έχει δύο κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.
19. Το ορθογώνιο βάσης μιας ισοσκελούς υπερβολής είναι τετράγωνο.
20. Κάθε ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα ίση με $\sqrt{2}$.
21. Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτες τους είναι κάθετες μεταξύ τους.

2ο Θέμα

Θέμα 2.1 Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(β) Να υπολογίσετε το $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(γ) Να υπολογίσετε το $\text{syn}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

(δ) Να υπολογίσετε το $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα \vec{v} και $\vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

Θέμα 2.2 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 9)$.

(α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$, αν $4\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

(β) Αν $\vec{\gamma} = (1, 1)$ να βρεθεί η γωνία $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

(γ) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (4, -11)$ σαν γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(δ) Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(ε) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{\beta}$.

Θέμα 2.3 Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$ και $\Gamma(1, -3)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB .

Θέμα 2.4 Δίνονται τα σημεία $A(0, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(4, -1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(δ) Να βρείτε την μεσοκάθετο της πλευράς AB .

Θέμα 2.5 Έστω (ϵ) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 0)$ και $B(0, 4)$ και (δ) η ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη στην (ϵ) .

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $x + y = 4$.

(β) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) .

(γ) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών (δ) και (ϵ) .

(δ) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM .

3ο Θέμα

Θέμα 3.1 Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις

$$\epsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0 \text{ και } \epsilon_2 : 4x + \lambda y + \lambda - 2 = 0.$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

(α) $\epsilon_1 \parallel y'y$

(β) $\epsilon_1 \parallel x'x$

(γ) $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$

(δ) $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

Θέμα 3.2 Δίνεται η εξίσωση

$$(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Υστερα να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση διέρχονται από σταθερό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\eta : -x + y + 1 = 0$ δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών της παραπάνω εξίσωσης.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση ϵ_2 που ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και είναι κάθετη στην $\eta : -x + y + 1 = 0$.

Θέμα 3.3 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 3x - 6y + 2 = 0$$

(α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

(β) Να αποδείξετε ότι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$.

(γ) Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ϵ_1 και ϵ_2 .

Θέμα 3.4 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση

$$C : (x - 1)^2 + y^2 = 2.$$

- (α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta : y = x + 1$.
- (β) Να εξετάσετε ποια από τις ευθείες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι εφαπτομένη του κύκλου

$$C' : (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Θέμα 3.5 Δίνεται η παραβολή: $C : y = 4x^2$. Να βρείτε

- (α) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής,
 (β) την εξίσωση της εφαπτομένης η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $y = x + 2013$.

Θέμα 3.6 Δίνεται κύκλος $C : x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο $M(2, 4)$.

- (α) Να βρείτε την σχετική θέση του $M(2, 4)$ ως προς τον κύκλο C .
 (β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του C , ε_1 και ε_2 , οι οποίες διέρχονται από το $M(2, 4)$.
 (γ) Να υπολογισθεί η γωνία των ε_1 και ε_2 .
 (δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής, A και B , των εφαπτομένων με τον κύκλο.
 (ε) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο A και από το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $y'y$.

Θέμα 3.7 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0.$$

- (α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 (β) Να δείξετε ότι το $M(4, -2)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.
 (γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B ώστε το M να είναι το μέσο του AB .

4ο Θέμα

Θέμα 4.1 Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
 (β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων του προηγούμενου ερωτήματος.
 (γ) Για $\lambda = -1$, να βρεθεί
 (γ1) η εξίσωση του κύκλου C_1 ,

(γ2) η θέση της ευθείας $\varepsilon : 3x + 4y - 5 = 0$ ως προς τον κύκλο C_1 .

Θέμα 4.2 Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α)** η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του,
- (β)** κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμηγκία διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους) και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A ,
- (γ)** οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A .

Θέμα 4.3 Δίνεται η εξίσωση

$$(x - 1)(x - 3) + (y - 3)(y - 5) = 0.$$

- (α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β)** Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy τα σημεία $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $\Gamma(3, 5)$ και $\Delta(1, 5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.
- (γ)** Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του προηγούμενου ερωτήματος, οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου K για κάθε χρονική στιγμή t , $t > 0$ είναι $(t, t + 2)$, να βρείτε αν η γραμμή, στην οποία κινείται το αυτοκίνητο K , συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία;

Θέμα 4.4. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2 + \lambda(x - y + 2) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- (α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ διαφορετικό από το 2 και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β)** Να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση για $\lambda = 2$.
- (γ)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1).
- (δ)** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.
- (ε)** Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon : -x + y = 2$.

Θέμα 4.5 Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και η εφαπτομένη ε σε τυχαίο σημείο της $\Pi(x_1, y_1)$. Η κάθετη στην ε στο Π τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Αν $M(u, v)$ είναι το μέσο του τμήματος $K\Lambda$, τότε:

- (α) να εκφραστούν τα u, v συναρτήσει των x_1, y_1 ,
- (β) να αποδειχθεί ότι το M ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρεθούν οι εστίες και η εκκεντρότητα.

Θέμα 4.6 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $C : x^2 + y^2 = 9$.

- (α) Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{5}{3}x_0, \frac{4}{3}y_0\right)$ ανήκει σε έλλειψη της οποίας να υπολογίσετε την εκκεντρότητα.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη.
- (γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής του ερωτήματος (β) καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες.

Θέμα 4.7 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\hat{\phi} = \frac{\pi}{3}$ και η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0. \tag{1}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

i. $2\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$,

ii. η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|}{2}$.

(β) Αν $K(1, 1)$ είναι το κέντρο του παραπάνω κύκλου, να αποδείξετε ότι:

i. $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $\rho = 1$,

ii. ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $\epsilon : 3x + 4y - 12 = 0$,

iii. η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με το $\vec{\alpha}$.