

Γενικό Λύκειο Θήρας
Γραπτές Προαγωγικές Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β Λυκείου

29 Μαΐου 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ϵ του κύκλου $C : x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 15

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$.

ii. Οι ευθείες $x = -1$ και $y = x$ είναι κάθετες.

iii. Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

iv. Η έλλειψη $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta > 0$ έχει εστίες $E(0, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$, $E'(0, -\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$.

v. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής με εξίσωση $C : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Μονάδες 5·2=10

ΘΕΜΑ Β

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

B3. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Μονάδες 7

B4. Να αποδείξετε ότι η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ ισούται με $-\vec{\alpha}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση

$$2x + y - 2 + \lambda(x - y + 5) = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και η ευθεία

$$\zeta : 2x - y + 11 = 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την ευθεία ϵ που ορίζεται από την εξίσωση (1) και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ .

Μονάδες 8

Γ4. Αν $\epsilon : 2x - y + 6 = 0$ να υπολογίσετε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ϵ και ζ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x - (\lambda + 3)y + \lambda = 0, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και η παραβολή

$$C : y^2 = 4x.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
Να εκφράσετε συναρτήσει του λ το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 10

Δ2. Να βρείτε τον κύκλο που ορίζεται από την εξίσωση (1) και έχει το κέντρο του στη διευθετούσα δ της παραβολής C .

Μονάδες 7

Δ3. Έστω $K(-1, 3)$ το κέντρο του κύκλου του ερωτήματος Δ2, E η εστία της παραβολής C και ϵ η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $A(1, 2)$.

Να βρείτε το σημείο M της ευθείας ϵ , τέτοιο, ώστε $\widehat{KEM} = 90^\circ$.

Μονάδες 8

Σας ευχόμαστε επιτυχία!

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές