Η Υπερβατικότητα του Πραγματικού Αριθμού π

Νικόλαος Δ. Κατσίπης *

Το άρθρο αυτό αποτελεί το περιεχόμενο εργασίας, που παρουσιάστηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος : *Η Θεωρία Αριθμών στην Εκπαίδευση* .

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να αποδειχθεί η υπερβατικότητα του αριθμού π. Στα 1761 ο Lambert απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Μέχρι το 1844 παρέμενε ανοικτό το ερώτημα για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών. Στα 1844 ο Liouville απέδειξε ένα κριτήριο για μιγαδικούς αλγεβρικούς αριθμούς αριθμούς και έδειξε ότι υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί. Με την μέθοδο αυτή εδειξε ότι ο $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$ είναι υπερβατικός. Στα 1873 ο Hermitte έδειξε την υπερβατικότητα του e, ενώ η υπερβατικότητα του π αποδείχθηκε απο τον Lindemann στα 1882. Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη του σχετικού θεωρήματος θα αναφέρουμε μερικά πράγματα που θα μας χρειαστούν.

Ορισμός 1: *Ένας μιγαδικός αριθμός χαρακτηρίζεται αλγεβρικός αν είναι ρίζα ενός μη μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Στην αντίθετη περίπτωση χαρακτηρίζεται υπερβατικός.*

Από την βασική θεωρία σωμάτων ξέρουμε ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί αποτελούν υπόσωμα του $\mathbb{C}$, άρα οι ρητές πράξεις μεταξύ αλγεβρικών αριθμών δίνουν αποτέλεσμα αλγεβρικό αριθμό.

Ορισμός 2: *Ένα πολυώνυμο καλείται συμμετρικό στα $x_1, x_2, \cdots, x_n$ αν παραμένει το ίδιο (πολυώνυμο) όταν εφαρμόσουμε μια οποιαδήποτε μετάθεση στις μεταβλητές, δηλαδή : $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ για κάθε $\sigma \in \mathbb{S}_n$, όπου $\mathbb{S}_n$ είναι η συμμετρική ομάδα.*
Τα *στοιχειώδη* συμμετρικά πολυώνυμα είναι τα :

. $s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

*Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

. $s_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$

. $s_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$

$\vdots$

. $s_n = x_1 x_2 \cdots x_n$.

Θεώρημα 1: (*Θεμελιώδες Θεώρημα των Συμμετρικών Πολυωνύμων*) *Αν το $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ είναι συμμετρικό πολυώνυμο βαθμού m, τότε μπορεί να εκφραστεί και ως πολυώνυμο των $s_1, \cdots, s_n$ βαθμού $\leq m$ με συντελεστές από το $\mathbb{Q}$.*

Παράδειγμα στις 3 μεταβλητές :
$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, προφανώς συμμετρικό. Εδώ $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $s_3 = x_1x_2x_3$. Αναπτύσσοντας το $(x_1 + x_2 + x_3)^3$ βρίσκουμε εύκολα ότι $f = s_1^3 - 3s_1s_2 - 3s_3$.

Παρατήρηση: Αν $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ένα μονικό πολυώνυμο n βαθμού με ρίζες $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_n$, τότε
$f(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n$, όπου s_k το στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο στις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_n$.

Θεώρημα 2 ***(Lindemann)*****:** Ο πραγματικός αριθμός π είναι υπερβατικός.

Απόδειξη: Θα υποθέσουμε ότι ο πραγματικός αριθμός π είναι αλγεβρικός και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αν ο π είναι αλγεβρικός τότε αφού ο i είναι αλγεβρικός και ο $i\pi$ είναι αλγεβρικός. Επομένως ο $i\pi$ είναι ρίζα ενός μη μηδενικού πολυωνύμου $d_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$, του οποίου τις ρίζες συμβολίζουμε $i\pi = w_1, w_2, \cdots, w_n$. Είναι $e^{w_1} + 1 = e^{i\pi} + 1 = 0$, οπότε :

$$(e^{w_1} + 1)(e^{w_2} + 1)\cdots(e^{w_n} + 1) = 0 \tag{1}$$

Αναπτύσσοντας την (1), έχουμε :

$$1 + \sum_{i=1}^{2^n-1} e^{a_i} = 0, \tag{2}$$

όπου $a_1, a_2, \cdots, a_{2^n-1}$ είναι οι $2^n - 1$ παρακάτω αριθμοί :
$w_1, w_2, \cdots, w_n, w_1 + w_2, w_1 + w_3, \cdots, w_1 + w_2 + w_3 \cdots + w_n$, με κάποια σειρά.

Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο $d^*(x)$ που έχει ως ρίζες τα $a_i, i = 1, \cdots, 2^n - 1$. Οι συντελεστές του $d^*(x)$ είναι συμμετρικά πολυώνυμα των $a_1, a_2, \cdots, a_{2^n-1}$, άρα συμμετρικά πολυώνυμα των $w_1, w_2, \cdots, w_n$ και επομένως πολυώνυμα των συντελεστών του $d_1(x)$ που είναι ρητοί αριθμοί.
Διαιρούμε το $d^*(x)$ με κατάλληλη δύναμη του x, αν χρειασθει [1], και πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο ακέραιο για να διώξουμε τους παρανομαστές των συντελεστών, παίρνουμε ένα πολυώνυμο $d(x)$ με ακέραιους συντελεστές και ρίζες όλους τους μη μηδενικούς εκθέτες $b_1, b_2, \cdots, b_r$ της (2).
Οπότε η (2) γίνεται :
$e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_r} + e^0 + e^0 + \cdots + e^0 = 0$, δηλαδή,

$$e^{b_1} + e^{b_2} + \cdots + e^{b_r} + k = 0, \tag{3}$$

για κάποιο φυσικό αριθμό $k \in \mathbb{Z}$. Έστω

$$d(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_0,$$

$c_0 \neq 0$ αφού το $d(x)$ δεν έχει ρίζα το 0. Έστω p ένας πρώτος, τον οποίο θα επιλέξουμε παρακάτω.

Ορίζουμε

$$f(x) = \frac{c_r^s x^{p-1} d(x)^p}{(p-1)!}, s = r(p-1). \tag{4}$$

Επίσης ορίζουμε

$$g(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(s+p+r-1)}(x). \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι $f^{(s+p+r)}(x) = 0$, διότι το πολυώνυμο είναι βαθμού $rp + p - 1$, ενώ $s + p + r = rp + p$.
Υπολογίζουμε εύκολα ότι : $\frac{d}{dy}(e^{-y}g(y)) = -e^{-y}f(y)$, οπότε, για οποιοδήποτε σταθερό x έχουμε
$e^{-x}g(x) - g(0) = -\int_0^x e^{-y}f(y)dy$.
Για $y = tx$ έχουμε

$$g(x) - e^x g(0) = -x \int_0^1 e^{(1-t)x} f(tx)dt.$$

Ας υποθέσουμε ότι στην παραπάνω σχέση το x παίρνει διαδοχικά τις τιμές $b_1, b_2, \cdots, b_r$. Οπότε, αθροίζοντας και χρησιμοποιώντας την (3) έχουμε

$$\sum_{j=1}^r g(b_j) + k \cdot g(0) = -\sum_{j=1}^r b_j \int_0^1 e^{(1-t)b_j} f(tb_j)dt. \tag{6}$$

[1] Αυτό θα χρειαστεί αν κάποιος από τους a_i είναι 0, γιατί τότε το $d^*(x)$ δεν θα έχει σταθερό όρο

Θα δείξουμε ότι για ένα μεγάλο πρώτο p το πρώτο μέλος της (6) είναι μη μηδενικός ακέραιος.
Πρώτα θα δείξουμε ότι $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j) \equiv 0 \pmod p$ για οποιοδήποτε $t \geq 0$. Αυτό ισχύει όταν $t < p$ διότι τότε κάθε προσθετέος του αθροίσματος είναι ίσος με μηδέν.
Για $t \geq p$ κάθε παράγωγος $f^{(t)}(b_j)$ έχει παράγοντα p, διότι πρέπει να παραγωγίσουμε το $d(x)$ τουλάχιστον p φορές για να πάρουμε ένα μη μηδενικό όρο. Για ένα οποιδήποτε $t \geq p$, το $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j)$ είναι ένα συμμετρικό πολυώνυμο των b_j βαθμού $\leq s$ [2]. Και από την παρατήρηση θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq s$ των συντελεστών c_i/c_r [3]. Ο συντελεστής c_r^s στον ορισμό της f απαλοίφει τις δυνάμεις του c_r που εμφανίζονται στους παρανομαστές, οπότε το άθροισμα είναι ακέραιος. Άρα, για $t \geq p$ [4] :

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j) = p \cdot n_t, n_t \in \mathbb{Z}.$$

Οπότε

$$\sum_{j=1}^{r} g(b_j) = \sum_{j=1}^{r} \Big(f(b_j) + f'(b_j) + \cdots + f^{(s+p+r-1)}(b_j) \Big) =$$

$$= p \cdot n_0 + p \cdot n_1 + \cdots + p \cdot n_{s+p+r-1} = n \cdot p, \text{ όπου } n \in \mathbb{Z}.$$

Για το $g(0)$ έχουμε [5]:

$$f^{(t)}(0) = \begin{cases} 0, \text{ αν } t \leq p-2 \\ c_r^s \cdot c_0^p, \text{ αν } t = p-1 \\ \mu_t \cdot p, \text{ αν } t \geq p, \text{ για κατάλληλο } \mu_t \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

Άρα:

$$g(0) = c_r^s \cdot c_0^p + \mu \cdot p, \mu \in \mathbb{Z}.$$

[2] $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j) = f^{(t)}(b_1) + \cdots + f^{(t)}(b_r)$ και είναι προφανές ότι οποιαδήποτε μετάθεση $\sigma \in \mathbb{S}_r$ αφήνει το άθροισμα ίδιο

[3] Τα c_i/c_r είναι σύμφωνα με την παρατήρηση οι στοιχειώδεις συμμετρικές παραστάσεις των $b_1, b_2, \cdots, b_r$. Το $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(b_j)$ μπορεί να γραφτεί απο το θεώρημα 1 ως πολυώνυμο των στοιχειδών συμμετρικών παραστάσεων των b_j, δηλαδή των c_i/c_r

[4] Γίνεται χρήση της γενικής ταυτότητας του *Leibniz* $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

[5] Γίνεται και πάλι χρήση της γενικής ταυτότητας του *Leibniz*

Άρα το πρώτο μελος της (6) γίνεται

$$\lambda \cdot p + k \cdot c_r^s \cdot c_0^p, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Έχουμε $k \neq 0$, $c_r \neq 0$, $c_0 \neq 0$.
Διαλέγω $p > \max(k, |c_r|, |c_0|)$. Τότε το πρώτο μέλος της είναι ακέραιος που δεν διαιρείται με p και επομένως διάφορος από το 0, άρα ≥ 1.

Εξετάζουμε τώρα το δεύτερο μέλος της (6). Έχουμε λοιπόν

$$|f(\lambda \cdot b_j)| \leq \frac{|c_r^s \cdot m(j)^p|}{|b_j| \cdot (p-1)!},$$

όπου $m(j) = |b_j| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |d(\lambda b_j)|$.
Επομένως

$$\left| -\sum_{j=1}^{r} b_j \int_0^1 \exp^{(1-t)b_j} f(tb_j) dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \frac{|c_r^s \cdot m(j)^p| \cdot B}{(p-1)!} \overset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

όπου B θετικό άνω φράγμα του $\left| \max_j \int_0^1 \exp^{(1-\lambda)b_j} \, d\lambda \right|$.

Άτοπο

.

Αναφορές

[1] Hardy and Wright, An Introduction To The Theory Of Numbers, Oxford University Press