Αξιοσημείωτες ταυτότητες

5ο Φύλλο Εργασίας

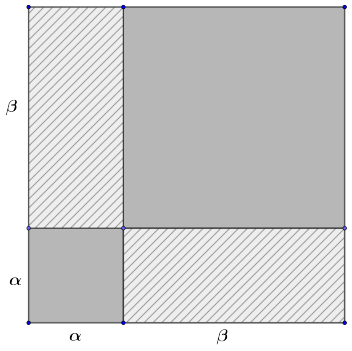
Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Για τους οποιουσδήποτε αριθμούς α, β να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης Α τη συμβολική γραφή της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. Το διπλάσιο γινόμενο τους	α. $2(\alpha+\beta)^2$
2. Το τετράγωνο του αθροίσματος τους	β. $2\alpha\beta$
3. Το άθροισμα των τετραγώνων τους	γ. $(\alpha+\beta)^2$
4. Το τετράγωνο του γινομένου τους	δ. $\alpha^2+\beta^2$
5. Το διπλάσιο του αθροίσματος τους	ε. $(\alpha\beta)^2$
6. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματος τους	στ. $2(\alpha+\beta)$

▷ ***Ταυτότητα*** *λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.*

2. Υποθέτουμε ότι α, β θετικοί αριθμοί.



(α΄) Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά $\alpha+\beta$ είναι: .....

(β΄) Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α είναι: .....

(γ΄) Το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές α και β είναι: .....

(δ΄) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, την ταυτότητα:
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

▷ ***Τετράγωνο αθροίσματος:*** $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α΄) $(3+\mathrm{x})^2=$..... (γ΄) $(-\mathrm{x}+\mathrm{y})^2=$.....

(β΄) $(3\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)^2=$..... (δ΄) $(-\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=$.....

▷ ***Τετράγωνο διαφοράς:*** $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

   (α΄) $(2x + ...)^2 = ... + ... + 25y^2$ (γ΄) $(... + ...)^2 = 25x^2 + 10xy + ...$

   (β΄) $(... - 3y)^2 = ... \cdots 6y + ...$ (δ΄) $(... + ...)^2 = x^2 + 3x + ...$

5. (α΄) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

   (β΄) Να βρείτε το ανάπτυγμα του $(x + 2y + 3)^2$.

▷ ***Κύβος αθροίσματος:*** $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

   (α΄) $(3 + x)^3 =$..... (γ΄) $(-x+y)^3 =$.....

   ....

   (β΄) $(2x-x^2)^3 =$..... (δ΄) $(-x-y)^3 =$.....

   ....

▷ ***Κύβος διαφοράς:*** $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

▷ ***Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά:*** $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

   (α΄) $(3+x)(3-x) =$..... (γ΄) $(-x+y)(-x-y) =$.....

   ....

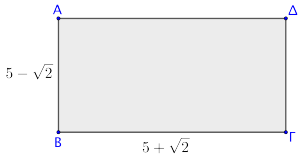
   (β΄) $(x^2-x)(x^2+x) =$..... (δ΄) $(-x+y)(x+y) =$.....

   ....

8. Αν $x = 5 + \sqrt{2}$ και $y = 5 - \sqrt{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = x^2 + y^2 - xy.$$

9. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε:



   (α΄) το εμβαδόν του,

   (β΄) το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

10. (α΄) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(x - 1)(x + 1) + 1 = x^2$

    (β΄) Με χρήση της παραπάνω ταυτότητας να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\sqrt{2016 \cdot 2018 + 1}$.

11. (α΄) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

    (β΄) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 = \alpha$$

"Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί."
Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.