Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου
Επαναληπτικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

28 Μαρτίου 2018

Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη ενόψει των εξετάσεων του Ιουνίου... Προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τη θεωρία και τις ασκήσεις των σημειώσεων σας.

1. Δίνεται το πολυώνυμο

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) = (2\mathrm{x}-1)^3 - 7\mathrm{x}(\mathrm{x}-1)^2 - 1$$

   (α΄) Να γράψετε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρείτε το βαθμό του.

   (β΄) Να παραγοντοποιήσετε το $\mathrm{P}(\mathrm{x})$.

2. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\dfrac{\mathrm{x}^2-\mathrm{xy}}{6\mathrm{y}} : \dfrac{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{6\mathrm{y}^2} = \dfrac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}$ (β΄) $\left(\dfrac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{y}} + \dfrac{1}{\mathrm{x}-\mathrm{y}}\right) : \dfrac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2} = \dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}.$

3. (α΄) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

   i. x^2-4 ii. $\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+4$ iii. $3\mathrm{x}^2-12$

   (β΄) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{3}{\mathrm{x}^2-4} - \frac{2}{\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+4}\right) : \frac{2\mathrm{x}-20}{3\mathrm{x}^2-12} = \frac{3}{2(\mathrm{x}-2)}$$

4. Δίνεται ότι:

$$\mathrm{x} = 3-\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \mathrm{y} = 3+\sqrt{2}.$$

   Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

   (α΄) $\mathrm{A} = \mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$, (β΄) $\mathrm{B} = \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2$, (γ΄) $\Gamma = \mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2$, (δ΄) $\Delta = \mathrm{x}^4-\mathrm{y}^4$.

5. (α΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι:

$$(\alpha+2)^2 - (\alpha+1)^2 - 2\alpha = 3.$$

   (β΄) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $1002^2 - 1001^2 - 2000$.

6. (α΄) Να λύσετε τις εξισώσεις:

   i. $x^2 - 9 = 0$ ii. $x^2 + 9 = 0$ iii. $x^2 - 9x = 0$

   (β΄) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

   i. $A = \dfrac{2x+6}{x^2-9}$ ii. $B = \dfrac{x^3+9x}{x^2+9}$ iii. $\Gamma = \dfrac{x(x-9)+x^2-81}{x^2-9x}$

   (γ΄) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και Γ.

7. Δίνονται οι παραστάσεις:

   $A = 3(x-2)^2-2(1-2x)(1+2x)-8x^2-5(3-2x)+4$ και $B = (x-2)^3+x^2(5-x)+9-12x$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι:

   $$A = 3x^2 - 2x - 1 \quad \text{και} \quad B = 1 - x^2$$

   (β΄) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $A = B$.

8. Δίνεται η παράσταση

   $$A = (2-x)(2+x) - (2x-1)^2 - 2$$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι

   $$A = -5x^2 + 4x + 1.$$

   (β΄) Να λύσετε την εξίσωση

   $$-5x^2 + 4x + 1 = 0.$$

   (γ΄) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

   $$-5x^2 + 4x + 1.$$

9. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 40cm.

   (α΄) Αν η μια διάσταση του ορθογωνίου είναι x τότε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x είναι: $E(x) = -x^2 + 20x$.

   (β΄) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, για τις οποίες το εμβαδόν ισούται με 75cm^2.

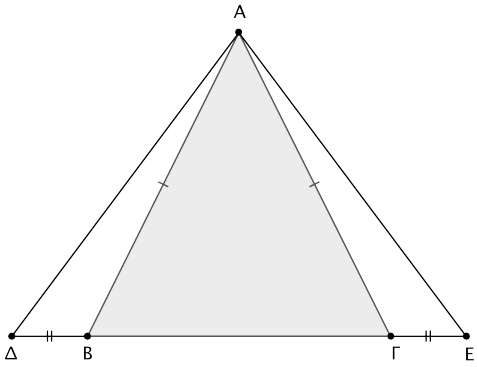
10. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

    $$\frac{x}{2} - 3 \leq x \quad \text{και} \quad 3 - (x-2) < -(1+2x).$$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

    (α΄) $5 - x < 1 - (x-1)$ (β΄) $2 + 3(x-1) < 3x + 1$

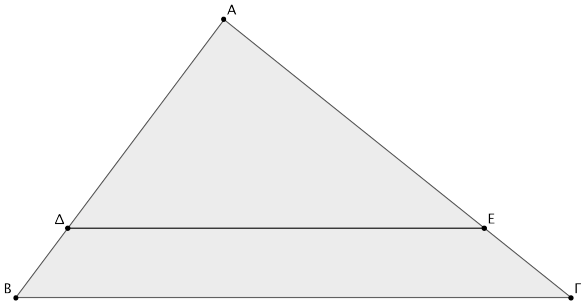
12. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$. Προεκτείνουμε την βάση ΒΓ κατά ίσα τμήματα $\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}$.



(α΄) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

(β΄) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Β από την πλευρά ΑΔ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά ΑΕ.

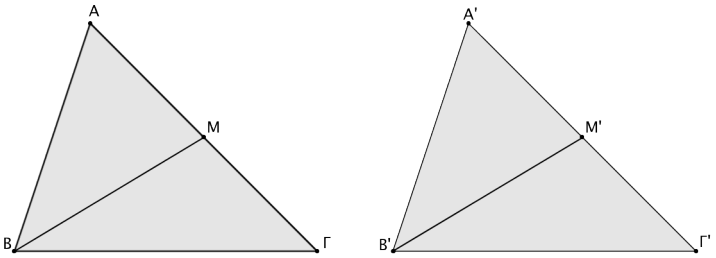
13. Στο διπλανό σχήμα είναι: $\Delta\text{Ε} \parallel \text{ΒΓ}$, $\text{ΑΒ} = 8\,\text{cm}$, $\text{ΑΔ} = 6\,\text{cm}$ και $\text{ΑΓ} = 12\,\text{cm}$.



(α΄) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

(β΄) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΕ και ΕΓ.

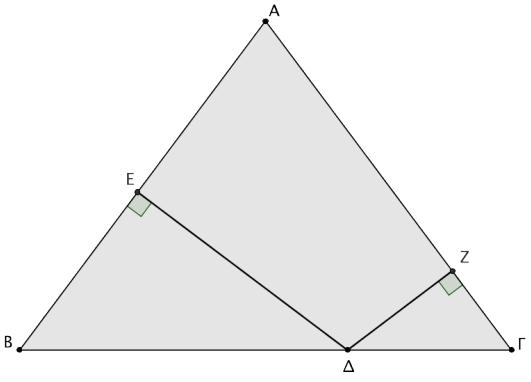
14. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\text{Α}'\text{Β}'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει: $\text{ΑΒ} = \text{Α}'\text{Β}'$, $\text{ΑΓ} = \text{Α}'\Gamma'$ και οι διάμεσοι τους ΒΜ και $\text{Β}'\text{Μ}'$ είναι ίσες.



(α΄) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΜ και $\text{Α}'\text{Β}'\text{Μ}'$ είναι ίσα.

(β΄) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\text{Α}'\text{Β}'\Gamma'$ είναι ίσα.

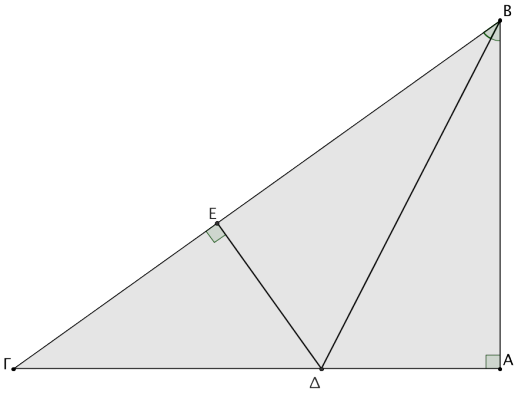
15. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$. Έστω σημείο Δ της ΒΓ τέτοιο ώστε $\text{ΒΔ} = 2\Delta\Gamma$. Φέρνουμε $\Delta\text{Ε} \perp \text{ΑΒ}$ και $\Delta\text{Ζ} \perp \text{ΑΓ}$.



(α΄) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΖΔ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.

(β΄) Αν $\Delta\text{Ε} = 4\text{cm}$ να βρείτε το μήκος του ΔΖ.

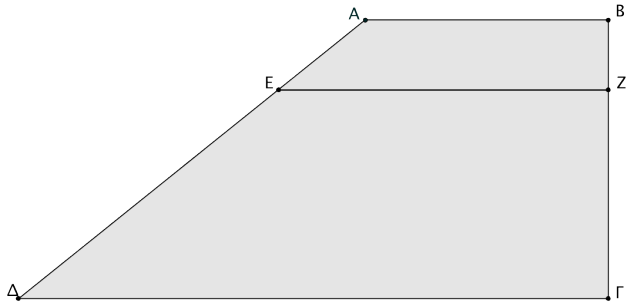
16. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\text{Α}} = 90^{\text{o}}$), η διχοτόμος του ΒΔ και ΔΕ $\perp$ ΒΓ.

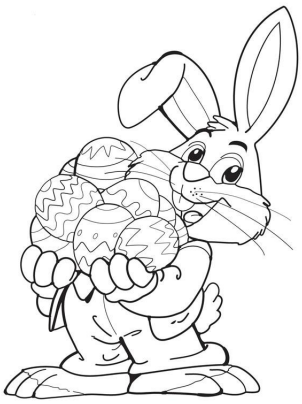


(α΄) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΑΔ και ΒΕΔ είναι ίσα.

(β΄) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.

17. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ$\|$ΓΔ) το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ είναι παράλληλο στις βάσεις του. Αν $\text{ΑΔ} = 12\ \text{cm}$, $\text{ΒΖ} = 2\ \text{cm}$ και $\text{ΖΓ} = 6\ \text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος των τμημάτων ΑΕ και ΕΔ.





Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!!!