

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

5ο Φύλλο Εργασίας

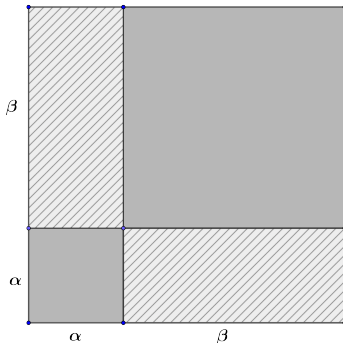
Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Για τους οποιουσδήποτε αριθμούς α, β να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης Α τη συμβολική γραφή της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Το διπλάσιο γινόμενο τους	α. $2(\alpha + \beta)^2$
2. Το τετράγωνο του αθροίσματος τους	β. $2\alpha\beta$
3. Το άθροισμα των τετραγώνων τους	γ. $(\alpha + \beta)^2$
4. Το τετράγωνο του γινομένου τους	δ. $\alpha^2 + \beta^2$
5. Το διπλάσιο του αθροίσματος τους	ε. $(\alpha\beta)^2$
6. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματος τους	στ. $2(\alpha + \beta)$

▷ Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

2. Υποθέτουμε ότι α, β θετικοί αριθμοί.



- (α) Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά $\alpha + \beta$ είναι:
- (β) Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α είναι:
- (γ) Το εμβαδόν του ορθογώνιου με πλευρές α και β είναι:
- (δ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, την ταυτότητα:
 $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

▷ Τετράγωνο αθροίσματος:
 $(\alpha + \beta)^2 =$
 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(10 + x)^2 = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

(β) $(3x - x^2)^2 = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

(γ) $(-\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

(δ) $(-\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

▷ Τετράγωνο διαφοράς:
 $(\alpha - \beta)^2 =$
 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες :

(α) $(2x + \dots)^2 = \dots + \dots + 25y^2$ (γ) $(\dots + \dots)^2 = 25x^2 + 10xy + \dots$

(β) $(\dots - 3y)^2 = \dots \dots 6y + \dots$ (δ) $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$

5. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα του $(x + 2y + 3)^2$.

▷ Κύβος

αθροίσματος:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 +$$

$$3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

(α) $(3 + x)^3 = \dots\dots\dots$ (γ) $(-\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

(β) $(2x - x^2)^3 = \dots\dots\dots$ (δ) $(-\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

▷ Κύβος διαφοράς:

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 -$$

$$3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

▷ Γινόμενο

αθροίσματος επί

διαφοράς:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) =$$

$$\alpha^2 - \beta^2$$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

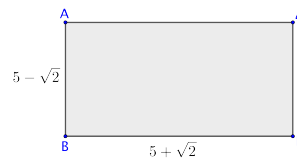
(α) $(3+x)(3-x) = \dots\dots\dots$ (γ) $(-\alpha+\beta)(-\alpha-\beta) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

(β) $(x^2-x)(x^2+x) = \dots\dots\dots$ (δ) $(-\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

8. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε :



- (α) το εμβαδόν του,
- (β) το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 4 + \sqrt{2}$ cm, $AG = 4 - \sqrt{2}$ cm και $BG = 6$ cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

10. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(x - 1)(x + 1) + 1 = x^2$
 (β) Με χρήση της παραπάνω ταυτότητας να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\sqrt{2017 \cdot 2019 + 1}$.

11. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$
 (β) Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 = \alpha$$

“Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλιά όχι να εξηγηθεί.”

Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.