

Μαθηματικά Γ Γυμνασίου

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

18 Απριλίου 2019

Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη ενόψει των εξετάσεων του Ιουνίου... Προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τη θεωρία και τις ασκήσεις των σημειώσεων σας.

1. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (2x - 1)^3 - 7x(x - 1)^2 - 1$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρείτε το βαθμό του.

(β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

2. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \frac{x^2 - xy}{6y} : \frac{x^2 - y^2}{6y^2} = \frac{xy}{x + y} \qquad (β) \left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} \right) : \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{x}{y}.$$

3. (α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $x^2 - 4$

ii. $x^2 - 4x + 4$

iii. $3x^2 - 12$

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{3}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^2 - 4x + 4} \right) : \frac{2x - 20}{3x^2 - 12} = \frac{3}{2(x - 2)}$$

4. Δίνονται οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} \quad \text{και} \quad B = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}.$$

(α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 - 2x = 0$

ii. $x^2 - 4 = 0$

(β) Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε.

(γ) Για τις τιμές που ορίζονται οι παραστάσεις A και B να αποδείξετε ότι:

$$B - A = -1.$$

5. Δίνεται ότι:

$$x = 3 - \sqrt{2} \quad \text{και} \quad y = 3 + \sqrt{2}.$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$(α) A = x \cdot y, \quad (β) B = x^2 + y^2, \quad (γ) Γ = x^2 - y^2, \quad (δ) Δ = x^4 - y^4.$$

6. (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι:

$$(\alpha + 2)^2 - (\alpha + 1)^2 - 2\alpha = 3.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $1002^2 - 1001^2 - 2000$.

7. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i. x^2 - 9 = 0$$

$$ii. x^2 + 9 = 0$$

$$iii. x^2 - 9x = 0$$

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$i. A = \frac{2x + 6}{x^2 - 9}$$

$$ii. B = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 9}$$

$$iii. Γ = \frac{x(x - 9) + x^2 - 81}{x^2 - 9x}$$

(γ) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και Γ.

8. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 3(x-2)^2 - 2(1-2x)(1+2x) - 8x^2 - 5(3-2x) + 4 \quad \text{και} \quad B = (x-2)^3 + x^2(5-x) + 9 - 12x$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$A = 3x^2 - 2x - 1 \quad \text{και} \quad B = 1 - x^2$$

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $A = B$.

9. Δίνεται η παράσταση

$$A = (2 - x)(2 + x) - (2x - 1)^2 - 2$$

(α) Να αποδείξετε ότι

$$A = -5x^2 + 4x + 1.$$

(β) Να λύσετε την εξίσωση

$$-5x^2 + 4x + 1 = 0.$$

(γ) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$-5x^2 + 4x + 1.$$

10. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 40cm.

- (α) Αν η μια διάσταση του ορθογωνίου είναι x τότε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x είναι: $E(x) = -x^2 + 20x$.
- (β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, για τις οποίες το εμβαδόν ισούται με 75cm^2 .

11. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{x}{2} - 3 \leq x \quad \text{και} \quad 3 - (x - 2) < -(1 + 2x).$$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $5 - x < 1 - (x - 1)$

(β) $2 + 3(x - 1) < 3x + 1$

13. Δίνεται η ευθεία:

$$2x - y = -2\alpha + \alpha^2, \quad \text{όπου } \alpha \text{ πραγματικός αριθμός,}$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-2, -3)$.

(α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(β) Αν $\alpha = 1$,

i. να σχεδιάσετε την ευθεία ϵ ,

ii. να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ το οποίο έχει τεταγμένη ίση με 3.

14. Στο επόμενο σχήμα φαίνονται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το O και δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις:

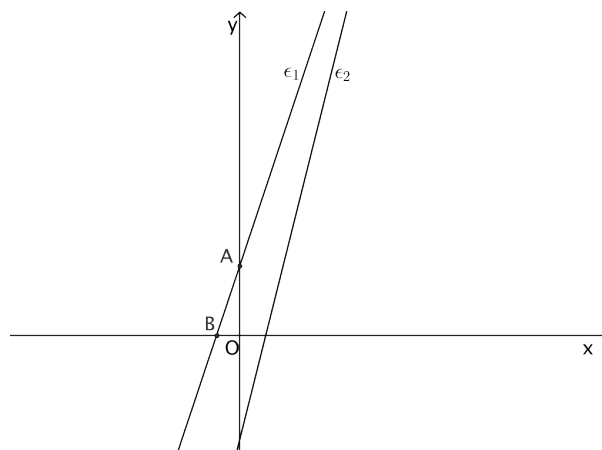
$$\epsilon_1 : y = 3x + 2 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : y = 4x - 3.$$

(α) Να εξετάσετε αν κάποια από τις δύο ευθείες διέρχεται από το σημείο $M(2, 5)$.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .



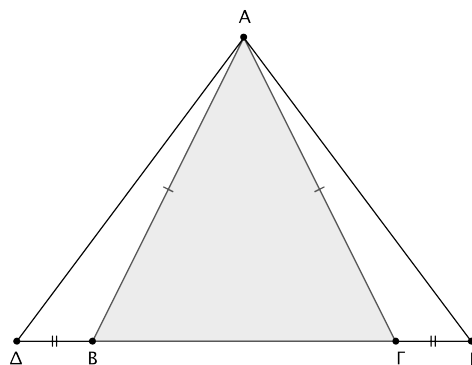
15. (α) Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών

$$\epsilon_1 : x - 3y = 5 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : -3x - 4y = -2.$$

(β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $\epsilon_3 : x - y = 1$ διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

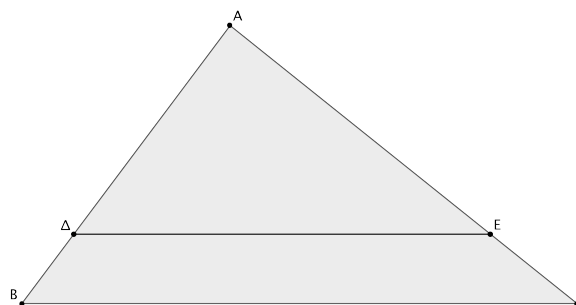
16. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε την βάση $B\Gamma$ κατά ίσα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$.

- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
 (β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου B από την πλευρά $A\Delta$ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά $A E$.



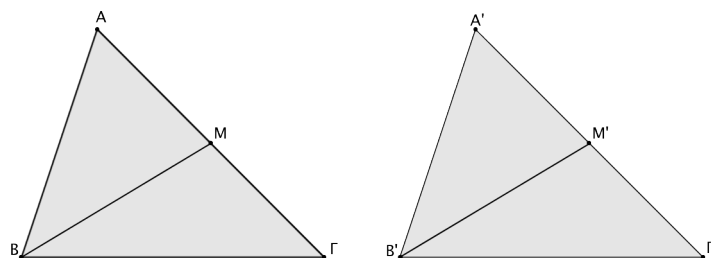
17. Στο διπλανό σχήμα είναι:
 $\Delta E \parallel B\Gamma$, $AB = 8 \text{ cm}$, $A\Delta = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 12 \text{ cm}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια.
 (β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A E$ και $E\Gamma$.



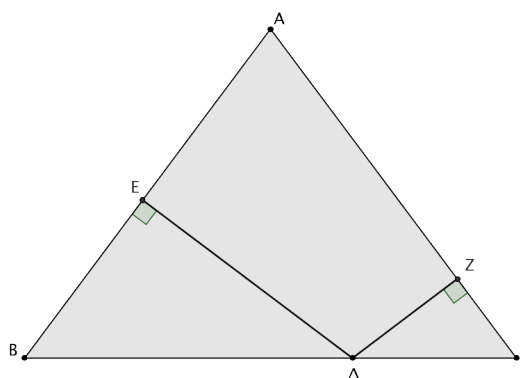
18. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει:
 $AB = A'B'$, $A\Gamma = A'\Gamma'$ και οι διάμεσοι τους BM και $B'M'$ είναι ίσες.

- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ είναι ίσα.
 (β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



19. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Έστω σημείο Δ της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\Delta = 2\Delta\Gamma$. Φέρνουμε $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$.

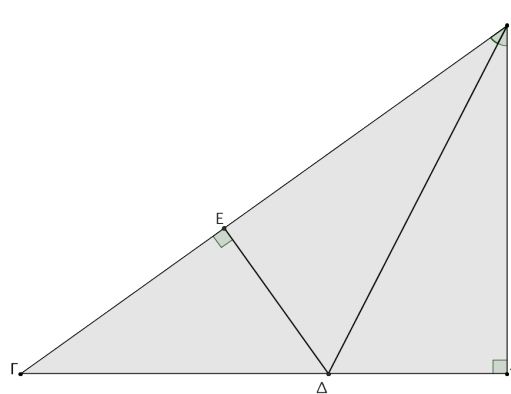
- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma Z\Delta$ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.
 (β) Αν $\Delta E = 4 \text{ cm}$ να βρείτε το μήκος του ΔZ .



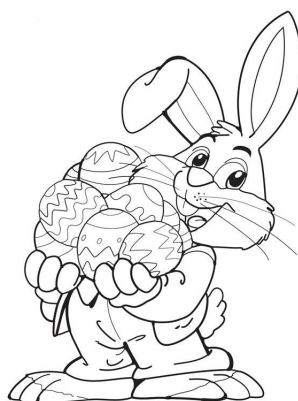
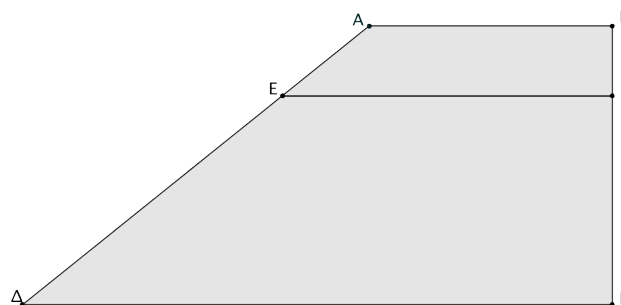
20. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος του $B\Delta$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BA\Delta$ και $BE\Delta$ είναι ίσα.

(β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους.



21. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) το ευθύγραμμο τμήμα EZ είναι παράλληλο στις βάσεις του. Αν $A\Delta = 12$ cm, $BZ = 2$ cm και $Z\Gamma = 6$ cm, να υπολογίσετε το μήκος των τμημάτων AE και $E\Delta$.



Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία !!!