

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Για τους οποιουδήποτε αριθμούς α, β να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης Α τη συμβολική γραφή της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Το διπλάσιο γινόμενο τους	α. $2(\alpha + \beta)^2$
2. Το τετράγωνο του αθροίσματος τους	β. $2\alpha\beta$
3. Το άθροισμα των τετραγώνων τους	γ. $(\alpha + \beta)^2$
4. Το τετράγωνο του γινομένου τους	δ. $\alpha^2 + \beta^2$
5. Το διπλάσιο του αθροίσματος τους	ε. $(\alpha\beta)^2$
6. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματος τους	στ. $2(\alpha + \beta)$

▷ Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

2. (α') Να κάνετε τις πράξεις:

$(4+3)^2 = \dots\dots\dots$ και $4^2+3^2 = \dots\dots\dots$

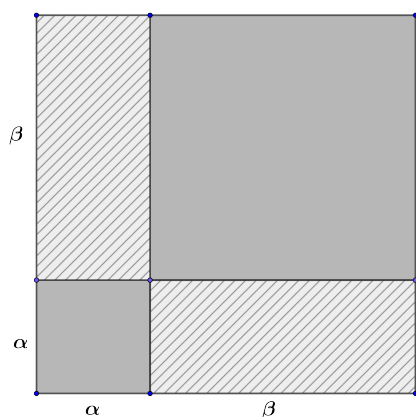
(β') Ισχύει: $(4 + 3)^2 = 4^2 + 3^2$;

Απάντηση: $\dots\dots\dots$

(γ') Άρα, για οποιουδήποτε αριθμούς α και β ισχύει: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$;

Απάντηση: $\dots\dots\dots$

3. Υποθέτουμε ότι α, β θετικοί αριθμοί.



(α') Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά $\alpha + \beta$ είναι: $\dots\dots$

(β') Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α είναι: $\dots\dots$

(γ') Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά β είναι: $\dots\dots$

(δ') Το εμβαδόν του ορθογώνιου με πλευρές α και β είναι: $\dots\dots$

(ε') Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, την ταυτότητα:
 $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

.....

▷ Τετράγωνο
αθροίσματος:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α') $(10 + x)^2 = \dots\dots\dots$	(γ) $(-\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
(β) $(3x - x^2)^2 = \dots\dots\dots$	(δ) $(-\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

▷ Τετράγωνο
διαφοράς:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

5. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

(α') $(2x + \dots)^2 = \dots + \dots + 25y^2$	(γ) $(\dots + \dots)^2 = 25x^2 + 10xy + \dots$
(β) $(\dots - 3y)^2 = \dots \dots 6y + \dots$	(δ) $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$

▷ Κύβος
αθροίσματος:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α') $(3 + x)^3 = \dots\dots\dots$	(γ) $(-\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
(β) $(2x - x^2)^3 = \dots\dots\dots$	(δ) $(-\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

▷ Κύβος διαφοράς:

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

▷ Γινόμενο
αθροίσματος επί
διαφοράς:

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α') $(3+x)(3-x) = \dots\dots\dots$	(γ) $(-\alpha+\beta)(-\alpha-\beta) = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
(β) $(x^2-x)(x^2+x) = \dots\dots\dots$	(δ) $(-\alpha+\beta)(\alpha+\beta) = \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

8. Να αποδείξετε ότι:

$$(x + 2y)^2 - (y - 2x)(y + 2x) + (2x - y)^2 = 9x^2 + 4y^2.$$

.....
.....
.....

9. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(2x - 1)^3 - 8x \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 =$$

.....
.....
.....

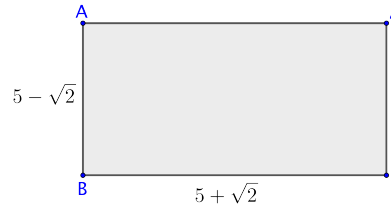
10. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma.$$

- (β) Να βρείτε το ανάπτυγμα:

$$(x + 2y + 3)^2.$$

11. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε:



- (α) το εμβαδόν του,
(β) το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 4 + \sqrt{2}$ cm, $AG = 4 - \sqrt{2}$ cm και $BΓ = 6$ cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

13. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(x - 1)(x + 1) + 1 = x^2$$

- (β) Με χρήση της παραπάνω ταυτότητας να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\sqrt{2018 \cdot 2020 + 1}.$$

14. (α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(\sqrt{3} - 1)^2.$$

- (β) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

15. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

- (β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 = \alpha$$

16. Αν $x + \frac{1}{x} = 5$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

“Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να αισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.”

Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.