

“ Μένουμε Σπίτι ”
...και κάνουμε Μαθηματικά !

1ο Φύλλο Εργασίας
Εγγεγραμμένες Γωνίες

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

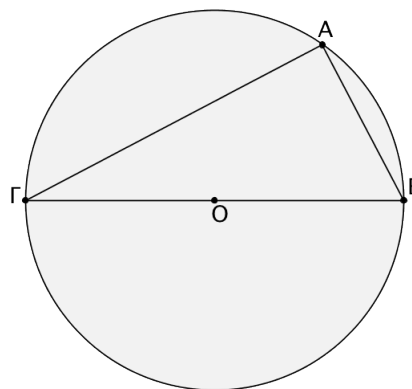
Άσκηση:

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $BΓ$.

Επίσης, η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 5$ cm και $\widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{ΓA}$.

(α') Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $ABΓ$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(β') Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $ABΓ$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Λύση:

(α') Επειδή η $BΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου τότε $\widehat{ΓB} = 180^\circ$.

Όμως ισχύει ότι:

$$\widehat{ΓB} = \widehat{ΓA} + \widehat{AB} .$$

Άρα:

$$\widehat{ΓA} + \widehat{AB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ΓA} + \frac{\widehat{ΓA}}{2} = 180^\circ$$

$$2 \widehat{ΓA} + 2 \frac{\widehat{ΓA}}{2} = 2 \cdot 180^\circ$$

$$2 \widehat{ΓA} + \widehat{ΓA} = 360^\circ$$

$$3 \widehat{ΓA} = 360^\circ$$

$$\widehat{ΓA} = 120^\circ$$

Οπότε: $\widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{GA} = 60^\circ$.

Η γωνία \widehat{GAB} είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $\widehat{GAB} = 90^\circ$.

Η γωνία \widehat{AGB} είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο \widehat{AB} , άρα θα ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου. Έχουμε:

$$\widehat{AGB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 30^\circ.$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι: $\widehat{ABG} = \frac{\widehat{GA}}{2} = 60^\circ$.

(β') Αφού η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε $B\Gamma = 2\rho = 10 \text{ cm}$.

Από τον τριγωνομετρικό πίνακα έχουμε ότι $\eta\mu 30^\circ = 0,5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι:

$$\eta\mu \widehat{G} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{AB}{10}$$

$$0,5 = \frac{AB}{10}$$

$$AB = 10 \cdot 0,5 \text{ cm}$$

$$AB = 5 \text{ cm}$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$$

$$10^2 = A\Gamma^2 + 5^2$$

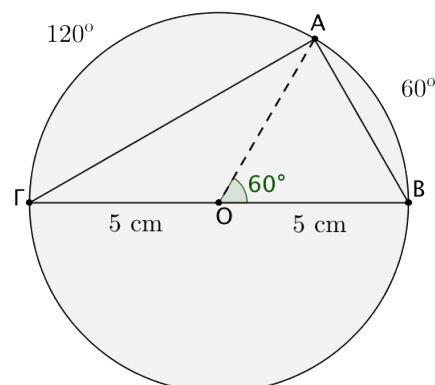
$$A\Gamma^2 = 100 - 25 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = 75$$

$$A\Gamma = \sqrt{75} \text{ cm} \quad \text{ή} \quad A\Gamma = \sqrt{25 \cdot 3} \text{ cm}$$

$$A\Gamma = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{ή} \quad A\Gamma = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Παρατηρήσεις:

Ένας άλλος τρόπος για την λύση του ερωτήματος (β') είναι να σχεδιάσουμε την ακτίνα ΟΑ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο και έτσι $AB = OA = OB = 5 \text{ cm}$. Για τον υπολογισμό της ΓΑ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ.



*“Ν’ αγαπάς την ευθύνη. Να λες εγώ, εγώ μονάχος μου θα σώσω τον κόσμο. Αν χαθεί,
εγώ θα φταίω”*

Νίκος Καζαντζάκης , 1883 – 1957, Έλληνας συγγραφέας.