" Μένουμε Σπίτι "
...και κάνουμε Μαθηματικά!
6ο Φύλλο Εργασίας
Κανονικά Πολύγωνα

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Άσκηση:

(α΄) Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 4$ cm να εγγράψετε ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ.

(β΄) i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του.

ii. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΖΑΓ.

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΖΑΓ.

(γ΄) Αν η χορδή ΑΕ τέμνει τη διάμετρο ΖΓ στο σημείο Κ,

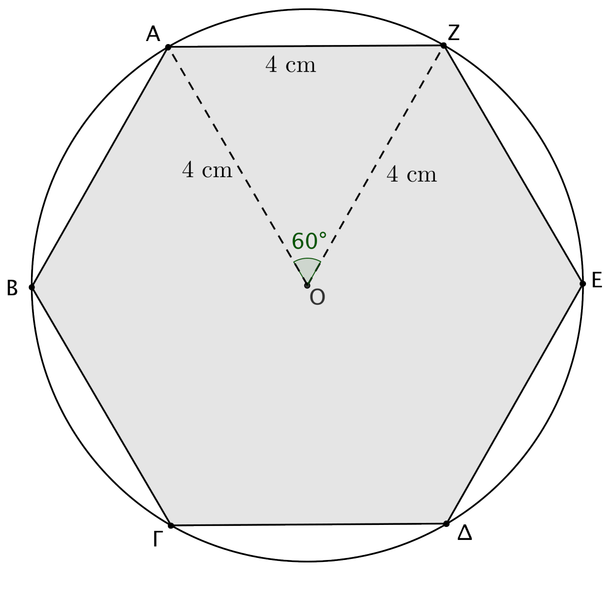
i. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΑΚ,

ii. να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΕ είναι κάθετη στη διάμετρο ΖΓ.

Λύση:

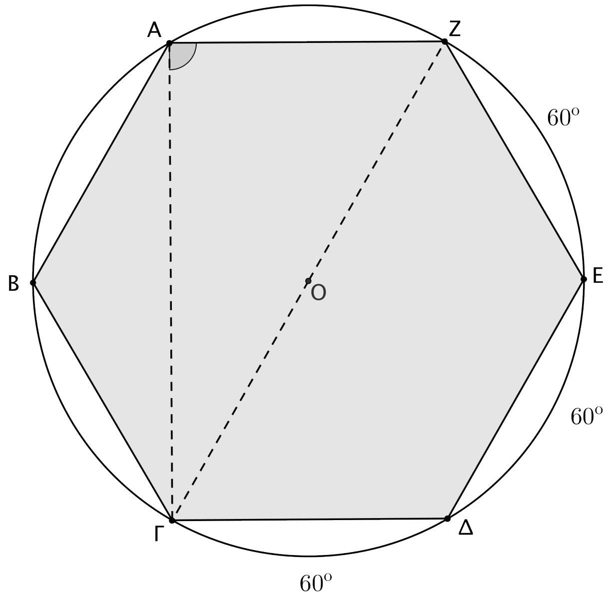
(α΄) Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Σχεδιάζουμε πρώτα ένα κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 4$ cm.
- Βρίσκουμε την κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου: $\omega = \dfrac{360^o}{6} = 60^o$.
- Σχεδιάζουμε την επίκεντρη γωνία $\mathrm{A\widehat{O}Z} = 60^o$.
- Με τη βοήθεια του διαβήτη παίρνουμε άλλα 5 διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{\mathrm{ZA}}$.
- Σχεδιάζουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων και έχουμε σχηματίσει το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ.



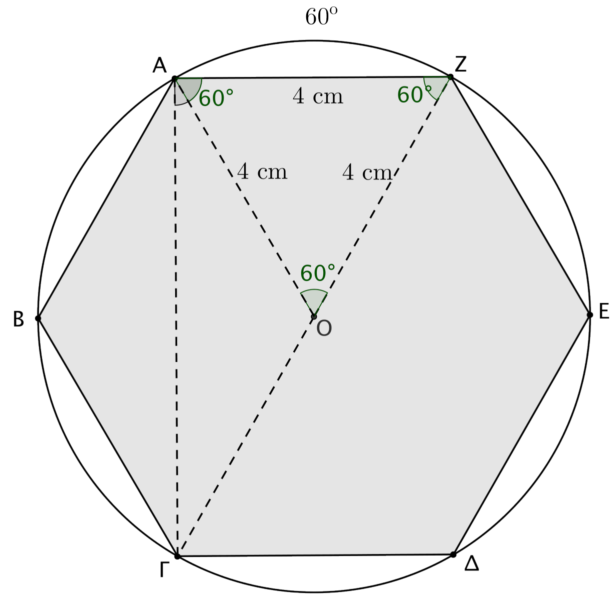
(β')

i. Η γωνία $Z\widehat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{Z\Gamma} = 60^o + 60^o + 60^o = 180^o$.
Άρα, $Z\widehat{A}\Gamma = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$.
Σημείωση: Επίσης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή.
Άρα, το τρίγωνο $ZA\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



ii. Το τρίγωνο AOZ είναι ισόπλευρο, αφού όλες οι γωνίες του είναι ίσες με 60^o, άρα, $AZ = 4\ \text{cm}$.
Σημείωση: Σε ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ισχύει ότι η πλευρά του είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.
Επίσης, η $Z\Gamma$ είναι διάμετρος, άρα $Z\Gamma = 2 \cdot \rho = 2 \cdot 4\ \text{cm} = 8\ \text{cm}$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZA\Gamma$, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
ZA^2 + A\Gamma^2 &= Z\Gamma^2\\
4^2 + A\Gamma^2 &= 8^2\\
16 + A\Gamma^2 &= 64\\
A\Gamma^2 &= 64 - 16\\
A\Gamma^2 &= 48\\
A\Gamma &= \sqrt{48}\ \text{cm}\\
A\Gamma &= \sqrt{16 \cdot 3}\ \text{cm}\\
A\Gamma &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}\\
A\Gamma &= 4\sqrt{3}\ \text{cm}
\end{aligned}
$$

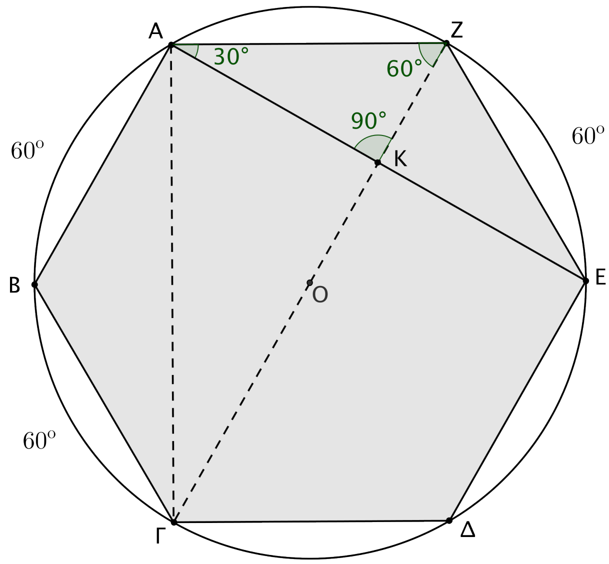


iii.

$$(ZA\Gamma) = \frac{AZ \cdot A\Gamma}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

(γ΄)

i. Η γωνία $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{ZE}} = 60^{o}$.
Άρα, $\mathrm{H}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \dfrac{60^{o}}{2} = 30^{o}$.
Η γωνία $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο
$\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{B}} = 60^{o} + 60^{o} = 120^{o}$.
Οπότε,
$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = \dfrac{120^{o}}{2} = 60^{o}$.
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ZAK είναι ίσο με 180^{o}.
Έχουμε, λοιπόν,
$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} + \mathrm{K}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} + \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = 180^{o}$.
Δηλαδή, $30^{o} + 60^{o} + \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = 180^{o}$
Οπότε, $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = 90^{o}$.



ii. Αφού η χορδή AE και η διάμετρος $\mathrm{Z}\Gamma$ τέμνονται στο σημείο K και $\widehat{\mathrm{K}} = 90^{o}$, τότε η χορδή AE είναι κάθετη στη διάμετρο $\mathrm{Z}\Gamma$.

¨Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν στη βαθύτερη γνώση του κόσμου.¨
Οδυσσέας Ελύτης, $1911 - 1996$, Έλληνας ποιητής.