

Η Έννοια της Πραγματικής Συνάρτησης Γραφική Παράσταση Συνάρτησης 1ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2}$

(ς) $h(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{|x| - 3}$

(ια') $f(x) = \frac{x + 1}{\ln x}$

(β) $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 1}$

(ζ) $f(x) = \sqrt{e^{x-1} - 1}$

(ιβ') $h(x) = \ln \frac{x - 2}{x + 2}$

(γ) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(η) $g(x) = \ln(e^x - 2)$

(ιγ') $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 2\right)$

(δ) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

(θ) $h(x) = \sqrt{\ln x + 1}$

(ε) $g(x) = \sqrt{2 - |x - 1|}$

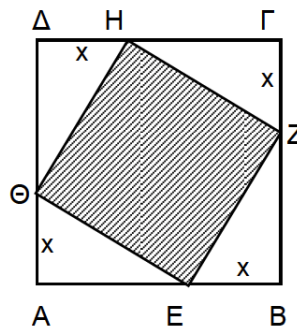
(ι) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

(ιδ') $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το \mathbb{R} .

3. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:



(α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανεληθιαδικές Εξετάσεις 2018)

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2021$ είναι αδύνατη.

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha^2$ έχει μία τουλάχιστον λύση (ως προς x) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$
και $\alpha \in f(A)$,
τότε η εξίσωση
 $f(x) = \alpha$ έχει
μία τουλάχιστον
λύση ως προς x
στο σύνολο A

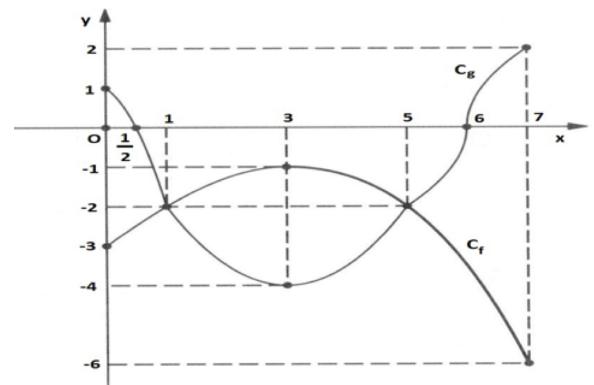
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 2 \\ x^2 - 6, & x < 2 \end{cases}$

- (α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
- (β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε το σημείο M(1, λ), να ανήκει στη C_f.
- (γ) Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης f.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 2)\sqrt{e^x - \frac{1}{e}}$. Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f,
- (β) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,
- (γ) τις τιμές του x ∈ ℝ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.



- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g.
- (β) Να επιλύσετε γραφικά τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:
 - i. $f(x) = 0$
 - ii. $g(x) = 0$
 - iii. $f(x) = g(x)$
 - iv. $g(x) > 0$
 - v. $f(x) < -2$
 - vi. $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$

(γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = λ$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες ως προς x.

8. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

- (α) $f(x) = \ln x + 1$
- (β) $f(x) = \ln(x + 1)$
- (γ) $f(x) = \ln(x - 1)$
- (δ) $f(x) = |\ln x|$
- (ε) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

- (ς) $f(x) = \ln(-x)$
- (ζ) $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 3 \\ 4 - x, & x < 3 \end{cases}$
- (η) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

“Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να αισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.”

Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.