

Μονότονες Συναρτήσεις

3ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) > f(x_2)$.

1. (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

- (β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

2. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} και $f(3) = 2$.
Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $f(x) < f(5)$

(γ) $f(x^2) < f(2+x)$

(β) $f(x) > 2$

(δ) $f(f(2x+3)) > f(f(x+1))$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

- (β) Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{1-x} + 4(1-x) < 1.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

- (β) Αν $0 < \alpha < 1$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} < \lambda^2 - \lambda - 2.$$

5. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5, 13)$ και $B(7, 11)$, τότε:

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) < f(x_2)$.

(α) να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f ,

(β) να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x) - 6) < f(7) + 2.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f(x) > e + 1$,

ii. $e^x < 1 - x^3$,

iii. $e^{f(x)} + f^3(x) > f(x^3 + 1)$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $x^5 + 3x < 4$,

(β) $e^{x-1} + \ln x > 1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x, \quad x > 0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + \ln x < x$.

9. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1, \quad x > 0.$$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0 \text{ και } g(x) = \frac{e}{x}, \quad x > 0.$$

(α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

(β) Να βρείτε την σχετική θέση των C_f και C_g .

Αν μια
συνάρτηση είναι
γνησίως
μονότονη σε ένα
διάστημα Δ και
έχει προφανή
ρίζα το $x_0 \in \Delta$,
τότε το x_0 είναι η
μοναδική ρίζα
της f στο Δ .

“Αυτοί που θα δουν καθαρά την αλήθεια των μαθηματικών, θα μπορέσουν να θαυμάσουν το μεγαλείο και τη δύναμη της φύσης, σ’ αυτή τη διπλή απειρία που μας περιτριγυρίζει από παντού και να μάθουν από αυτή τη θαυμαστή θεώρηση πώς να γνωρίσουν τον εαυτό τους, βλέποντάς τον τοποθετημένο ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα κίνησης, ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα χρόνου. Έτσι θα μπορέσουν να μάθουν να αξιολογούν δίκαια τον εαυτό τους και να σχηματίζουν συλληλογισμούς που να αξίζουν εν τέλει περισσότερο από όλες τις μαθηματικές γνώσεις”.

Blaise Pascal, 1623 – 1662, Γάλλος μαθηματικός-φυσικός.