

Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

1. Στα παρακάτω κενά να σημειώσετε τα σύμβολα \Rightarrow ή \Leftrightarrow , ώστε να προκύψουν αληθείς ισχυρισμοί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(α) $\alpha = \beta \dots\dots\dots 2\alpha = 2\beta$

(δ) $\alpha \cdot \beta = 0 \dots\dots\dots \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

(β) $\alpha = \beta \dots\dots\dots \alpha^2 = \beta^2$

(ε) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \dots\dots\dots \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

(γ) $\alpha = \beta \dots\dots\dots \alpha + 2 = \beta + 2$

(ς) $\alpha = 3$ και $\beta = 5 \dots\dots\dots \alpha + \beta = 8$

2. Αν $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 1 + 3(2\alpha - 3\beta) - 2(\alpha - \beta) - \beta.$$

3. Δίνεται ότι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

$$A = \alpha - 3\beta + 4\gamma, \quad B = \beta - \alpha - 2\gamma.$$

Αν οι αριθμοί A και B είναι αντίθετοι, να δείξετε ότι $\beta = \gamma$.

Δύο αριθμοί α και β είναι αντίθετοι αν $\alpha + \beta = 0$. Ο αντίθετος του α είναι ο $-\alpha$.

Δύο αριθμοί α και β

(διαφορετικοί του μηδενός) είναι αντίστροφοι αν έχουν γινόμενο 1.

Ο αντίστροφος του $\alpha \neq 0$ είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

4. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι και έχουν άθροισμα ίσο με 2, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha(3 - \beta) + \beta(3 - \alpha).$$

Επίμεριστική ιδιότητα:

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$

5. Δίνεται η παράσταση

$$A = x - x(x^2 - x) - (x - 3)(2x + 1).$$

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(β) Αν $x = -\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης A.

Αν $\alpha \neq 0$ τότε

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^0 = 1$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $A = (-4)^2 \cdot 2^{-1} - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

(β) $B = (-2)^2 - 2^4 + 2^3 + 2^0 - 2^{-2}$

(γ) $\Gamma = (-1)^{2020} - (-1)^{2021} + \frac{3^{10}}{3^{11}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}.$

Αν $\alpha, \beta \neq 0$, τότε

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$$

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	(α') $(5^3)^5 \cdot (5^2)^{-7}$	(ε') $\frac{(-63)^3}{21^3}$	
$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \alpha \neq 0$	(β') $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4}$	(ς') $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5}$	$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$
$\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$	(γ') $\frac{9^5}{(-3)^{10}}$	(ζ') $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}}$	
$\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu, \beta \neq 0$	(δ') $(0,01)^3 \cdot 10^5$	(η') $2^{15} + 2^{15} - 2^{16}$	

8. Να αποδείξετε ότι:

(α) $(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
 (β) $(a + b + \gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2a\gamma + 2b\gamma,$
 (γ) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b),$
 (δ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4, x \neq 0,$
 (ε) $\left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2.$

Μέθοδοι
 απόδειξης,
 σελίδες 48 – 49

9. Αν $a \in \mathbb{Z}$ και ο a^2 είναι περιττός, να αποδείξετε ότι ο a είναι περιττός.

10. Να γραφούν ως γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

(α) $2x^2 - 6x$	(δ) $x^3 + x^2 - x - 1$
(β) $\alpha x + \beta y + \alpha y + \beta x,$	(ε) $9x^2 - (x - 2)^2,$
(γ) $10x^3 - 6y^3 + 4xy^2 - 15x^2y,$	(ς) $x^2 - 2x + 1.$

11. (α) Να γραφούν ως γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

i. $x^3 - 1,$ ii. $x^3 + 1,$ iii. $x^6 - 1.$

(β) Να αποδείξετε ότι το $10^6 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{x^3 - 8x^2 + 16x}{x^2 - 4x},$	(γ) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1},$
(β) $\frac{(x - 3)(x - 2) - (3 - x)(x - 1)}{2x - 3},$	(δ) $\left(x + \frac{y^2}{x - y}\right) \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3 + y^3}.$

“Αν οι αριθμοί δεν είναι όμορφοι, δεν ξέρω τι είναι όμορφο.”
 Paul Erdős, 1913-1996, Ούγγρος μαθηματικός