

# Ακρότατα Συνάρτησης-Συνάρτηση 1 – 1

## Αντίστροφη Συνάρτηση

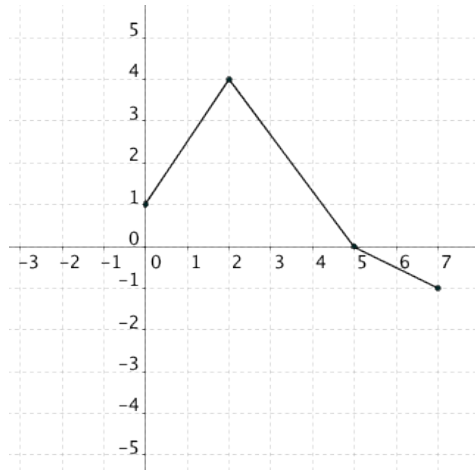
### 4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (οβλικό) **ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (οβλικό) **μέγιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .



- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  καθώς επίσης και το σύνολο τιμών της.
- (β) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
- (γ) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .
- (δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $|f|$  και να βρείτε τα ολικά ακρότατα της.
- (ε) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = x^2 + 4$ .

Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται **συνάρτηση 1-1** όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η **συνεπαγωγή** αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

*Χρήσιμο σε ασκήσεις:*  
Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$ .  
Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x + 1}{3^x}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση  $e^x + 1 - 2 \cdot 3^x = 0$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3^x + x^3, x \in \mathbb{R}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση  $3^x + x^3 = 4$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι:

$$f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1 – 1.

(β') Να λύσετε την εξίσωση  $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$ .

Μια συνάρτηση  $f$   
με πεδίο ορισμού  
το  $A$  λέγεται  
άρτια αν:  
για κάθε  $x \in A$   
ισχύει ότι  
 $-x \in A$   
και  
 $f(-x) = f(x)$  για  
κάθε  $x \in A$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 - 1.
- (β') Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.
- (γ') Να δείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.

6. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε η  $f \circ g$  να είναι 1 - 1.

- (α) Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι 1 - 1.
- (β) Αν για κάθε  $x > 0$  ισχύει ότι  $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$ , να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$ .

Μια συνάρτηση  $f$   
με πεδίο ορισμού  
το  $A$  λέγεται  
περιττή αν: για  
κάθε  $x \in A$   
ισχύει ότι  
 $-x \in A$   
και  
 $f(-x) = -f(x)$   
για κάθε  $x \in A$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x - 2}, x \geq 2$ . Να βρείτε την αντίστροφη της και να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις τους στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Οι γραφικές  
παραστάσεις των  
 $f$  και  $f^{-1}$  είναι  
συμμετρικές ως  
προς την ευθεία  
 $y = x$ , που  
διχοτομεί τις  
γωνίες  $\widehat{Ox}$  και  
 $\widehat{Oy'}$ .

Μια συνάρτηση  $f$   
είναι 1-1, αν και  
μόνο αν κάθε  
οριζόντια ευθεία  
τέμνει τη  $C_f$  το  
πολύ σε ένα  
σημείο.

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 - 1.
- (β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2)$  και  $B(3, -2)$ .

- (α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .
- (β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- (γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(3x - 1) + 2 < 0$ .
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^{x-1}) = 2$ .
- (ε) Να βρείτε τις τιμές  $f^{-1}(2)$  και  $f^{-1}(-2)$ .
- (ς) Να λύσετε την εξίσωση  $f(-2 + f^{-1}(x + 2)) = 2$ .

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x}, g(x) = \sqrt{2 - x} \text{ και } \phi(x) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

- (α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.
- (β) Να ορίσετε την συνάρτηση  $h = g \circ f$ .
- (γ) Να αποδείξετε ότι  $h^{-1}(x) = -\ln(2 - x^2), x \in [0, \sqrt{2})$ .
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση  $h^{-1}(x) + \phi(x) = 0$  στο διάστημα  $[0, \sqrt{2})$ .

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”

Bacon Roger, 1214 - 1292, Άγγλος φιλόσοφος.