Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

3ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β, δηλαδή $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.

α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$.

1. Αν $\alpha < 2$ και $\beta > 3$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

   (α΄) $\alpha - 2$ (β΄) $\beta - 3$ (γ΄) $(\alpha - 2)(\beta - 3)$

α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$.

2. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\gamma < 0$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

   (α΄) $-(\alpha + \beta)$ (β΄) $\alpha\gamma + \dfrac{\beta}{\gamma}$ (γ΄) $(\alpha + 2)(\gamma - 1)$

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$. Το $=$ μόνο αν $\alpha = 0$.

$\alpha > 0$ και $\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$.

$\alpha < 0$ και $\beta < 0 \Rightarrow \alpha + \beta < 0$.

3. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$
   (β΄) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$
   (γ΄) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$
   (δ΄) $(\alpha + \beta)(\alpha + 4\beta) \geq 9\alpha\beta$

4. Αν $\alpha < -1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + 1 < \alpha^2 + \alpha.$$

5. Αν $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι

$$\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2.$$

$\alpha > \beta$ και $\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

$\alpha > \beta$ και $\gamma < 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

$\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

$\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

$\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$

$0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με $<$ ή $>$ ώστε οι παρακάτω ισχυρισμοί να είναι αληθείς.

   (α΄) $\alpha < 3 \Rightarrow \alpha$ 5
   (β΄) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - 2$ ...... $\beta - 2$
   (γ΄) $\alpha < 2$ και $\beta < 4 \Rightarrow \alpha + \beta$ 6
   (δ΄) $\alpha < \beta \Rightarrow -2\alpha$ ...... -2β
   (ε΄) $\alpha > \beta \Rightarrow 3\alpha$ 3β
   (ϛ΄) $\alpha < \beta \Leftrightarrow -\alpha$ ...... $-\beta$
   (ζ΄) $\alpha > 3$ και $\beta > 2 \Rightarrow \alpha\beta$ 6
   (η΄) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2$ ...... β^2
   (θ΄) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}$ ...... $\dfrac{1}{\beta}$

7. Αν $0 < \beta < \alpha$, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\alpha > \dfrac{3\alpha + 4\beta}{7}$

   (β΄) $\dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{3\alpha+1}{3\beta+1}$.

8. Να αποδείξετε ότι αν α καιβ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

9. Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$,

   (β΄) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

10. Αν $1 < x < 2$ και $3 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

    (α΄) $x + 2y$

    (β΄) $3x - 2y$

    (γ΄) $y - x$

    (δ΄) $\dfrac{x}{y}$

    (ε΄) $\dfrac{x+2}{y-1}$

    (ϛ΄) $x^2 + y^2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\alpha = 0$ *και* $\beta = 0$.

11. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, να αποδείξετε ότι:

$$x^2 - 4x + y^2 + 4 \geq 0.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$ *ή* $\beta \neq 0$.

12. Δίνονται οι αριθμοί K και Λ, με

$$K = \alpha^2 + 2\beta + 1 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha - 1 - \beta^2, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   (α΄) Να συγκρίνετε τους αριθμούς K και Λ.

   (β΄) Πότε οι αριθμοί K και Λ είναι ίσοι;

13. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει ότι:

    (α΄) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$

    (β΄) $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$

14. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta.$$

15. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

    (α΄) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$,

    (β΄) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$0, \ \alpha, \ \alpha^3, \ 1, \ \frac{1}{\alpha}.$$

¨Οπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.¨

Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.