Ασκήσεις στην Ισότητα Τριγώνων
4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Συνέπειες των κριτηρίων ισότητας τριγώνων

- Στο ισοσκελές τρίγωνο:
  - Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
    (Πόρισμα Ι, σελίδα 42)
  - Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
    (Πόρισμα Ι, σελίδα 42)
  - Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ύψος και διχοτόμος.
    (Πόρισμα Ι, σελίδα 45)
  - Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διάμεσος και διχοτόμος.
    (Πόρισμα Ι, σελίδα 50)
- Στον κύκλο:
  - Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.
    (Πόρισμα IV, σελίδα 42, Πορίσματα ΙΙΙ, IV, σελίδα 46)
  - Δύο χορδές είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.
    (Θεώρημα ΙΙΙ, σελίδα 51)
  - Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:
    - είναι μεσοκάθετος της χορδής,
    - διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής. (Πόρισμα ΙΙ, σελίδα 50)
- Ιδιότητα διχοτόμου γωνίας:
  - Κάθε σημείο της διχοτόμου μια γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
  - Κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στη διχοτόμο της.

    (Θεώρημα εν Γ΄΄, σελίδα 51)
- Ιδιότητα μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος:
  - Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
  - Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

    (Πόρισμα ΙΙΙ, σελίδα 42, Πόρισμα ΙΙ, σελίδα 45)

Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε ΒΔ = ΓΕ.
   Αν το σημείο Μ είναι το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές,

   (β΄) τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), ΑΔ το ύψος του και Ο τυχαίο σημείο του ΑΔ.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

   (β΄) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΑΖ.

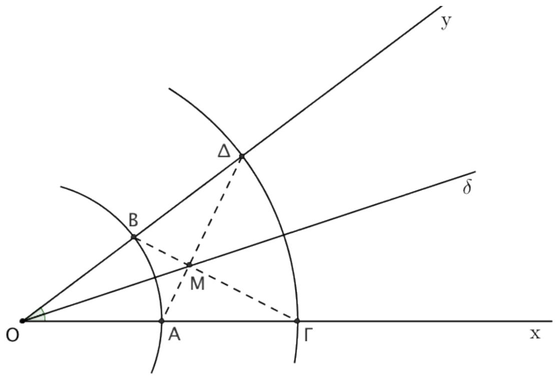
3. Θεωρούμε γωνία $x\widehat{O}y$ και δύο κύκλους (O, ρ), (O, R), με $\rho < R$. Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox, Oy στα σημεία Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

   (α΄) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα,

   (β΄) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα,

   (γ΄) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα,

   (δ΄) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\widehat{O}y$.



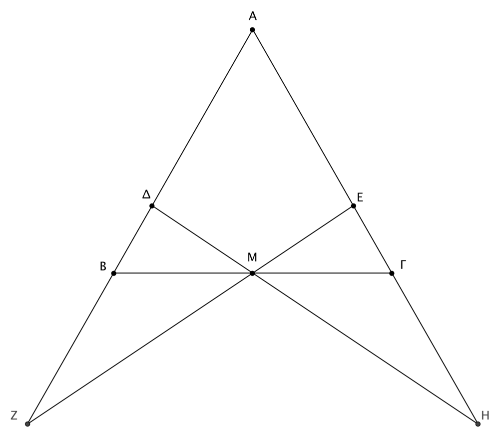
4. Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Επίσης, ΑΔ = ΑΕ και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

   Αν η προέκταση του ΔΜ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΓ στο σημείο Η και η προέκταση του ΕΜ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

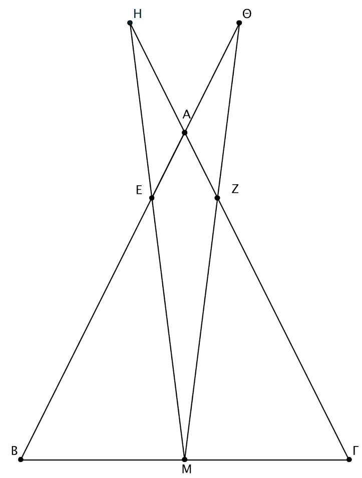
   (α΄) τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΕΜΓ είναι ίσα,

   (β΄) τα τρίγωνα ΖΒΜ και ΗΓΜ είναι ίσα,

   (γ΄) το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.



5. Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$. Αν $ΑΕ = ΑΖ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:



   (α') τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΓΖΜ είναι ίσα,

   (β') τα τρίγωνα ΗΑΕ και ΘΑΖ είναι ίσα,

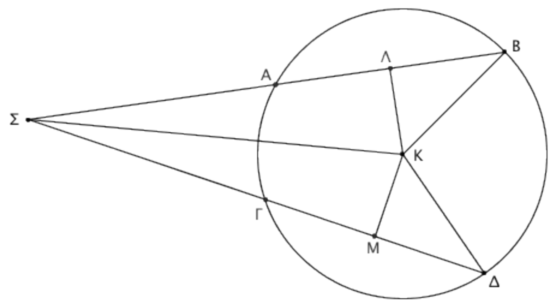
   (γ') το τρίγωνο ΗΜΘ είναι ισοσκελές.

6. Από εξωτερικό σημείο Σ του κύκλου $(Κ, \rho)$ θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει $ΣΒ = ΣΔ$. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.

   (α') Να αποδείξετε ότι:

      i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα,

      ii. $ΚΛ = ΚΜ$.



   (β') Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.

7. Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΒ, ΓΔ δύο ίσες και μη τεμνόμενες χορδές. Έστω Μ και Ν σημεία στις χορδές ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΑΜ = ΓΝ$. Να αποδείξετε ότι $ΟΜ = ΟΝ$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΓΒ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$ και στην πρέκταση της ΒΓ σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΓΕ = ΑΓ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $Α\widehat{Β}Δ$ και $Α\widehat{Γ}Ε$ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Ζ και Θ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

   (α') οι ευθείες που ορίζουν τα Β,Ζ και τα Γ, Θ είναι μεσοκάθετες των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα,

   (β') αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $Α\widehat{Β}Δ$ και $Α\widehat{Γ}Ε$,

      i. το τρίγωνο ΑΔΙ είναι ισοσκελές,

      ii. το τρίγωνο ΔΙΕ είναι ισοσκελές,

      iii. το ΙΑ διχοτομεί τη γωνία $Β\widehat{Α}Γ$.

¨*Ο Αρχιμήδης θα μνημονεύεται, όταν ο Αισχύλος θα έχει ξεχαστεί, γιατί, ενώ οι γλώσσες πεθαίνουν, οι μαθηματικές ιδέες είναι διαχρονικές.*¨

Godfrey Harold Hardy, 1877-1947, Άγγλος μαθηματικός.