# Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

## 4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

*Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός. Αν $\alpha > 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$*

*Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του. Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha$*

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

   (α΄) $|-3| + |-2|$

   (β΄) $|5| + |-2|$

   (γ΄) $|-1| + |0|$

   (δ΄) $|2| - |-3|$

   (ε΄) $\left|\sqrt{2} - 1\right| - \left|1 - \sqrt{2}\right|$

*Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$*

*Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha^2| = \alpha^2$*

2. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

   (α΄) $|\alpha^2 + 2\alpha + 1|$

   (β΄) $|-\alpha^2 - 1|$

3. Αν $-1 < \mathrm{x} < 4$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση
$$\mathrm{A} = |\mathrm{x} - 4| + |\mathrm{x} + 1| - |\mathrm{x} - 5|.$$

*Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$.*

4. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού $\mathrm{x}$, να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:

   (α΄) $|\mathrm{x} - 4|$

   (β΄) $5 + |\mathrm{x} + 2|$

   (γ΄) $||\mathrm{x}| - \mathrm{x}|$

*Αν $\beta \neq 0$, τότε: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$.*

*$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$*

5. Αν $\mathrm{x} < 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση
$$\mathrm{A} = |3\mathrm{x} - 6| + |10 - 5\mathrm{x}|.$$

*Αν $\theta < 0$, τότε $|\mathrm{x}| = \theta$, αδύνατη.*

*Αν $\theta > 0$, τότε $|\mathrm{x}| = \theta \Leftrightarrow \mathrm{x} = \theta$ ή $\mathrm{x} = -\theta$. $|\mathrm{x}| = |\alpha| \Leftrightarrow \mathrm{x} = \alpha$ ή $\mathrm{x} = -\alpha$*

6. Να βρείτε, αν υπάρχουν, του πραγματικούς αριθμούς $\mathrm{x}$ για τους οποίους ισχύει:

   (α΄) $|\mathrm{x}| = 7$

   (β΄) $|\mathrm{x} - 1| - 6 = 0$

   (γ΄) $|\mathrm{x}| + 6 = 0$

   (δ΄) $|\mathrm{x} - 3| - 1 = 0$

   (ε΄) $|\mathrm{x} - 3| = |2\mathrm{x} - 1|$

   (ϛ΄) $|\mathrm{x} - 5| - |1 + 2\mathrm{x}| = 0$

*$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$*

7. Αν $|\alpha| \leq 2$ και $|\beta| \leq 3$, να αποδείξετε ότι:

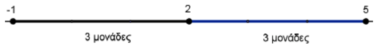
   (α΄) $|\alpha + \beta| \leq 5$

   (β΄) $|2\alpha - \beta| \leq 7$

8. Η ανίσωση $|\mathrm{x}-2|<3$ σημαίνει:

   "*ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το* $2$ *απόσταση μικρότερη του* $3$.
   *Δηλαδή:*

$$|\mathrm{x}-2|<3 \Leftrightarrow \mathrm{d}(\mathrm{x},2)<3 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in (-1,5)$$




   Με τη βοήθεια του παραπάνω να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

*Απόσταση των αριθμών $\alpha$ και $\beta$:* $\mathrm{d}(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$.

*Ισχύει ότι:* $\mathrm{d}(\alpha,\beta)=\mathrm{d}(\beta,\alpha)$

| **Απόλυτη Τιμή** | **Απόσταση** | **Διάστημα ή Ενωση Διαστημάτων** |
|---|---|---|
| $\lvert\mathrm{x}\rvert<4$ | | |
| | $\mathrm{d}(\mathrm{x},5)>2$ | |
| | $\mathrm{d}(\mathrm{x},-1)\leq 2$ | |
| $\lvert\mathrm{x}+2\rvert\geq 1$ | | |

*Αν $\theta>0$, τότε:* $|\mathrm{x}|<\theta \Leftrightarrow -\theta<\mathrm{x}<\theta$

*Αν $\theta>0$, τότε:* $|\mathrm{x}|>\theta \Leftrightarrow \mathrm{x}<-\theta$ *ή* $\mathrm{x}>\theta$.

9. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|\alpha-2|<1 \text{ και } |\beta-3|<2.$$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $1<\alpha<3$.

   (β΄) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο $\beta$.

   (γ΄) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-2\beta$.

   (δ΄) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$

10. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}$, $\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}$ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2$, $7$ και $\mathrm{x}$ αντίστοιχα, με $-2<\mathrm{x}<7$.

   (α΄) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

   **i.** $|\mathrm{x}+2|$ **ii.** $|\mathrm{x}-7|$

   (β΄) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|\mathrm{x}+2|+|\mathrm{x}-7|$.

   (γ΄) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=|\mathrm{x}+2|+|\mathrm{x}-7|$ γεωμετρικά.

   (δ΄) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

"*Τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι που παίζεται σύμφωνα με κάποιους απλούς κανόνες, με σύμβολα που έχουν νόημα, πάνω σε ένα χαρτί.*"
David Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.