Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right).$

$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

$\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$

$\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$

1. (α') Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

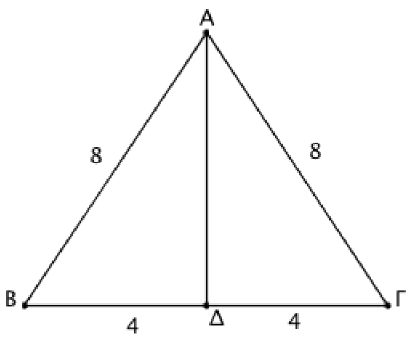
   (β') Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 10$, να βρείτε το$|\vec{\beta}|$.

   (γ') Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -12$, να βρείτε το$|\vec{\beta}|$.

   (δ') Αν $|\vec{\alpha}| = 2$,, να βρείτε το $\vec{\alpha}^2$.

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0.$

2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:



   (α') $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ (δ') $\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A}$

   (β') $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta B}$ (ε') $\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}$

   (γ') $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ (ϛ') $\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta B}$

3. Δίνονται τα σημεία $A(-3,6)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(4,-1)$.

   αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

   (α') Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

   (β') Να βρείτε σημείο Κ του άξονα x'x τέτοιο, ώστε: $\overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $\left|\vec{\beta}\right| = 2\sqrt{2}$. Να βρείτε:

   (α') $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ (δ') $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$

   (β') $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ (ε') $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$

   (γ') $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2$ (ϛ') $\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)\cdot\left(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta}\right)$

$\vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right) = \left(\lambda\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\beta} = \lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right).$

$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.$

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε: $συν\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot\left|\vec{\beta}\right|}.$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = 2,\ \left|\vec{\beta}\right| = 3 \text{ και } \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Αν $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ για τα οποία ισχύει:
$$|\overrightarrow{\beta}| = 2|\overrightarrow{\alpha}| = 4 \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = -8.$$
   (α') Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.
   (β') Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\beta} + 2\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0}$.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{\alpha} - 4\overrightarrow{\beta}$, για τα οποία ισχύουν:
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \text{ και } |\overrightarrow{\alpha}| = |\overrightarrow{\beta}| = 1.$$
   Να αποδείξετε ότι:
   (α') $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \dfrac{1}{2}$,
   (β') τα διανύσματα $\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ και $\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$ είναι αντίρροπα και $|\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}| = 14$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,5)$ και $\Gamma(4,-4)$.
   (α') Να εξετάσετε αν η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ είναι οξεία ή αμβλεία.
   (β') Να βρείτε τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$.

9. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:
$$2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta} = (4,-2) \text{ και } \overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta} = (-7,8).$$
   (α') Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\alpha} = (-1,2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (2,-2)$.
   (β') Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε τα διανύσματα $\kappa\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ και $2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta}$, να είναι μεταξύ τους κάθετα.
   (γ') Να αναλυθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma} = (3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$.

10. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\gamma}$, για τα οποία ισχύει ότι:
$$|\overrightarrow{\alpha}| = 1, \ \left|\overrightarrow{\beta}\right| = 1, \ |\overrightarrow{\gamma}| = 2 \text{ και } \overrightarrow{\alpha} + 5\overrightarrow{\beta} + 2\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}.$$
   (α') Να βρείτε τα $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\gamma}$ και $\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma}$.
   (β') Να βρείτε τα συν$\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right)$, συν$\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma}}\right)$ και συν$\left(\widehat{\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}}\right)$.
   (γ') Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\gamma} = 2\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\alpha} = -\overrightarrow{\beta}$.

¨Τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι που παίζεται σύμφωνα με κάποιους απλούς κανόνες, με σύμβολα που έχουν νόημα, πάνω σε ένα χαρτί.¨
David Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.