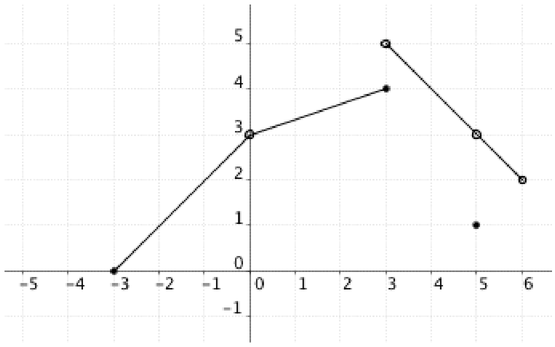
Συνέχεια Συνάρτησης

7ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

f συνεχής στο $x_0 \in D_f \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:



   (α') το πεδίο ορισμού της f

   (β') τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο x_0, τις παρακάτω συναρτήσεις:

   (α')
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}2x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases},$$
$$x_0 = 0$$

   (β')
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{αν } x < 3 \\ \sqrt{x^2 + 7}, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases},$$
$$x_0 = 3$$

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
$$|f(x)| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

4. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 0$ και ισχύει:
$$\text{ημ}2x - x^2 \leq xf(x) \leq \text{ημ}2x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
και f συνεχής στο x_0 να βρείτε το $f(0)$.

5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 5.$$
Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\,(1, 4)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x + 2 = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-3, 2)$.

Θεώρημα του Bolzano: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

7. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2.$$

8. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\,(1, 0)$.
Αν $\alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α') υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

(β') δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

10. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 2xf(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

(β') Αν $f(0) = 1$, να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών: Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(2) = 5$ και

$$f\,(f(x)) + f(x) = 20, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α') $f(5) = 15$ (β') $f(10) = 10$.

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

12. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών $f\,(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{xe^x - 1}{e^x}$.

(α') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

(β') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(γ') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2021)e^x = 1$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής: Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η φ παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Επίσης, $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$

¨Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών¨

Bacon Roger , 1214 − 1292, Άγγλος φιλόσοφος.