Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα

Βασικό Τυπολόγιο

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Συντεταγμένες Διανύσματος: Αν δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1).$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων: $\overrightarrow{u} = \kappa\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε: $\overrightarrow{u} = (\kappa\mathrm{x}_1 + \lambda\mathrm{x}_2, \kappa\mathrm{y}_1 + \lambda\mathrm{y}_2)$.

Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος: Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Τότε:

- αν O σημείο αναφοράς,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

- αν $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$,

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right).$$

Μέτρο Διανύσματος: Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τότε: $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$.

Απόσταση 2 σημείων: Αν $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε:

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}.$$

Τριγωνική Ανισότητα: $\left||\overrightarrow{\alpha}| - |\overrightarrow{\beta}|\right| \leq \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| \leq |\overrightarrow{\alpha}| + |\overrightarrow{\beta}|$.

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος: Αν $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ και θ η γωνία που διαγράφει ο άξονας $\mathrm{x}'\mathrm{x}$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, τότε:

$$\lambda_{\overrightarrow{\alpha}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \text{εφ}\theta,\ \mathrm{x} \neq 0.$$

Εσωτερικό Γινόμενο: Έχουμε ότι:

- $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = |\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right| \text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right)$.
- αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε:

$$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_1\mathrm{y}_2.$$

- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$.
- $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le |\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|$.
- $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 \le \vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$.
- $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.
- $\vec{\alpha}\cdot\left(\lambda\vec{\beta}\right) = (\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)$.

Ίσα Διανύσματα: Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$

ή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Αντίθετα Διανύσματα: Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha}=-\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$

ή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha}=-\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$

Παραλληλία (Ομόρροπα-Αντίρροπα):

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}$,

- $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta},\ \lambda > 0$.
- $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta},\ \lambda < 0$.
- $\vec{\alpha}\parallel x'x \Leftrightarrow y_1 = 0$.
- $\vec{\alpha}\parallel y'y \Leftrightarrow x_1 = 0$.
- $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}| + \left|\vec{\beta}\right|$.
- $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|$.
- $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \left||\vec{\alpha}| - \left|\vec{\beta}\right|\right| = \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$.
- $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|$.
- Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$ τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.
- $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Καθετότητα: Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε:

- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$.
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων: Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|}.$$