

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατοίπης

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α .

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \sqrt{16} + \sqrt{0,04} + \sqrt{0,64} = 5$$

$$(\beta) \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = 2$$

$$(\gamma) \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9$$

$$(\delta) \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = 6$$

$$(\epsilon) \sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3}$$

$$(\zeta) \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{45}$$

$$(\eta) \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} = 0$$

$$(\theta) \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{12}} = 3$$

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$$

$$(\beta) \sqrt{2} (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}) = 2$$

$$(\gamma) \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 5$$

$$(\delta) \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} = 1$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

3. Αν $x = 2 + \sqrt{3}$ και $y = 2 - \sqrt{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$(\alpha) xy \quad (\beta) x^2 + y^2 \quad (\gamma) x^2 - y^2 \quad (\delta) x^3 + y^3 \quad (\epsilon) x^4 - y^4$$

4. (α) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(2 + \sqrt{5})^2 \text{ και } (2 - \sqrt{5})^2.$$

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 4.$$

5. Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \sqrt{\alpha^2\beta^2}$$

$$(\beta) \sqrt{\alpha^4\beta^2}$$

$$\text{Αν } \beta \geq 0,$$

$$\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 4$$

$$(β) \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = 4\sqrt{2}$$

7. Αν $1 < x < 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = 2.$$

8. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Να αποδείξετε ότι:

$$(α) A > 0$$

$$(β) A^2 = 2$$

$$(γ) A = \sqrt{2}$$

Αν $\alpha \geq 0$,

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$$

9. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

$$(α) \sqrt[5]{1}$$

$$(δ) \sqrt[5]{32}$$

$$(ζ) \sqrt[3]{0,001}$$

$$(β) \sqrt[4]{16}$$

$$(ε) \sqrt[3]{125}$$

$$(η) \sqrt[3]{0,027}$$

$$(γ) \sqrt[3]{64}$$

$$(ς) \sqrt[3]{1000}$$

$$(θ) \sqrt[4]{0,0016}$$

Η ν-οστή ρίζα

ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν , δίνει τον α .

Αν $\alpha \leq 0$ και

ν άρτιος,

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = |\alpha|$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} = 2$$

$$(β) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}+1} = 4$$

Αν $\alpha > 0$,

$\mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}$,

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(δ) \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[20]{5} = 5$$

$$(β) \sqrt{25\sqrt{5\sqrt{5}}} = 5 \cdot \sqrt[8]{5^3}$$

$$(ε) \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^8} = 8$$

$$(γ) \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{3^5}$$

$$(ς) \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{32} = 4$$

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

12. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, B = (\sqrt[3]{3})^6 \text{ και } \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

“Οι νόμοι της φύσης είναι οι μαθηματικές σκέψεις του Θεού”
Ευκλείδης, 4-3ος αιώνας π.Χ., Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός.