Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου
Όριο-Συνέχεια Συνάρτησης
8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

    (α') Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

    (β') Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-\mathrm{f}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\mathrm{x'x}$.

    (γ') Η γραφική παράσταση της $|\mathrm{f}|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $\mathrm{x'x}$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $\mathrm{x'x}$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

    (δ') Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $\mathrm{fog} \neq \mathrm{gof}$.

    (ε') Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

    (ϛ') Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

    (ζ') Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $\mathrm{f(x)=y}$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

    (η') Μία συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $\mathrm{x_1, x_2} \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $\mathrm{x_1 = x_2}$, τότε $\mathrm{f(x_1) = f(x_2)}$.

    (θ') Οι γραφικές παραστάσεις των f και $\mathrm{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\mathrm{y=x}$ που διχοτομεί τις γωνίες $\mathrm{x\widehat{O}y}$ και $\mathrm{x'\widehat{O}y'}$.

    (ι') Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση $\mathrm{f^{-1}}$ και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $\mathrm{y=x}$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της $\mathrm{f^{-1}}$.

    (ια') Αν υπάρχει το όριο της f στο $\mathrm{x_0}$ και είναι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x_0}} \mathrm{f(x)} < 0$, τότε $\mathrm{f(x)} < 0$ κοντά στο $\mathrm{x_0}$.

(ιβ') Η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \text{ημ}\mathrm{x}$ με $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

(ιγ') Για την συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} \mathrm{f(x)} = 1$.

(ιδ') Ισχύει ότι $|\text{ημ}\mathrm{x}| \le |\mathrm{x}|$, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

(ιε') Αν $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}-1} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1} \mathrm{f(x)} = 0$.

(ιϛ') Ισχύει $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} \dfrac{1}{\mathrm{x}^{\nu}} = +\infty$, για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(ιζ) Αν $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \dfrac{1}{\mathrm{f(x)}} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{f(x)} = 0$.

(ιη') Αν $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{f(x)} = 0$ και $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{g(x)} = +\infty$, τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = 0$.

(ιθ') Αν $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{f(x)} = 0$ και $\mathrm{f(x)} > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \dfrac{1}{\mathrm{f(x)}} = +\infty$.

(κ') Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to -\infty} \alpha^{\mathrm{x}} = 0$.

(κα') Ισχύει $\lim\limits_{\mathrm{x}\to +\infty} \dfrac{\text{ημ}\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = 1$.

(κβ') Ισχύει $\lim\limits_{\mathrm{x}\to +\infty} \left(\mathrm{x}\ \text{ημ}\dfrac{1}{\mathrm{x}}\right) = 1$.

(κγ') Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $\mathrm{f}(\alpha) = 2$ και $\mathrm{f}(\beta) = 3$, τότε υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{e}$.

(κδ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $\mathrm{f}(\alpha) \cdot \mathrm{f}(\beta) < 0$.

(κε') Η εικόνα $\mathrm{f}(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.

(κϛ') Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $\mathrm{f}(\alpha) \neq \mathrm{f}(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $\mathrm{f}(\alpha)$ και $\mathrm{f}(\beta)$.

(κζ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(κη') Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[\mathrm{m}, \mathrm{M}]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

   (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. Μονάδες 4

   (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $\mathrm{f}, \mathrm{g} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *αν ισχύει* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{f(x)} = +\infty$ *και* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{g(x)} = -\infty$, *τότε* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} (\mathrm{f(x)} + \mathrm{g(x)}) = 0$.

(α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *και* $f(x) \neq 0$ *κοντά στο* x_0*, τότε:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \quad \acute{\eta} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

(α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

5. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$*, όταν υπάρχει το όριο της* f *καθώς το* x *τείνει στο* $x_0 \in A$*, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της* f *στο* x_0.

(α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

Θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(β') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.

(δ') Να σχεδιάσετε (πρόχειρα) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2$.
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α') $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 3}{x^3 - 1}$

(β') $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{|x - 1|}$

(γ') $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{x + 1}$

(δ') $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|-x^2 + x| - f(x)}{x^3 + 2}$

(ε') $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{f(x)} + x\right)$

(ϛ') $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

(β') Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

(γ') Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{fof})(\mathrm{x})=\mathrm{x}$, για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

(δ') Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\frac{1}{3}}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})\eta\mu\left(\frac{1}{3\mathrm{x}+1}\right)\right)$.

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2+\alpha$ και $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{x}+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(\mathrm{fog})(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}$, για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=-1$.

(β') Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f,g είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

(γ') Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\mathrm{g}^{-1}\mathrm{of}$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(\mathrm{x})=\sqrt{(\mathrm{g}^{-1}\mathrm{of})(\mathrm{x})}$.

(δ') Έστω η συνάρτηση $\mathrm{h}:[0,1]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})+2\le\mathrm{h}(\mathrm{x})\le\mathrm{g}(\mathrm{x})+2,\quad \text{για κάθε } \mathrm{x}\in[0,1].$$

i. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1}\mathrm{h}(\mathrm{x})=2$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1}\dfrac{\sqrt{\mathrm{h}(\mathrm{x})+7}-3}{\mathrm{h}^2(\mathrm{x})-4}$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

5. Έστω η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\ln(\mathrm{x}+1)$ και συνάρτηση $\mathrm{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(\mathrm{g}\circ\mathrm{f})(\mathrm{x})=\dfrac{2\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}+2}$, $\mathrm{x}>-1$.

(α') Να αποδείξετε ότι η $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1}$, $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$.

(β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}.

(γ') Αν $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x})=\ln(\dfrac{\mathrm{x}}{2-\mathrm{x}})$, $\mathrm{x}\in(0,2)$, να βρείτε την μονοτονία της $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x})$.

(δ') Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g^{-1} με την ευθεία $\epsilon:\mathrm{y}=-\mathrm{x}+1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}+\mathrm{x}$.

(α') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(β') Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

(γ') Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}+\mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)<\dfrac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$.

(δ') Να εξετάσετε αν υπάρχει $\mathrm{x}_0\in(-\infty,0)$, τέτοιο, ώστε $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)=\ln(1-\mathrm{x}_0)$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \dfrac{e}{x}$.

   (α') Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

   (β') Να λύσετε την εξίσωση: $x^x = e^e$, $x > 0$.

   (γ') Να βρείτε τα όρια:

   i. $\lim\limits_{x\to 0^+} (g(x)f(x))$ **ii.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(2^x + 3^x) - x)$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x+1} - 1} = 8.$$

   (α') Να βρείτε το $f(0)$.

   (β') Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) + x_0^3 = 2e^{-x_0}.$$

   (γ') Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{ημ2x}$.

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

   (α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

   (β') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

   i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   ii. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

   iii. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

   iv. $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

   v. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

   Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (γ') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

   i. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$

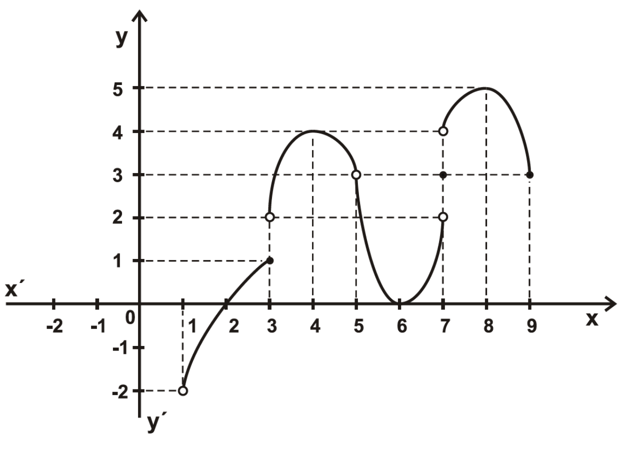
   ii. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$

   iii. $\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))$

   Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (δ') Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

   Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016)

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα!!!
2021 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος!!!