

Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου

Φύλλο Χριστουγέννων

6ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

Αγαπητά μου παιδιά, εύχομαι οι παρακάτω ασκήσεις, να αποτελέσουν μια όμορφη μαθηματική συντροφιά τις γιορτινές αυτές ημέρες και να γίνουν αφορμή για μια μικρή επανάληψη. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

(α) Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$.

(β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.

(γ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 < \beta^2$.

(δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $\sqrt{(-x)^2} = |x|$.

(ε) Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x^2 + y^2 > 0$, τότε $x \neq 0$ ή $y \neq 0$.

(ς) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

(ζ) Ισχύει: $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{6}$.

(η) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $|\alpha| \geq 0$.

(θ) Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq \alpha$ συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.

2. Χρησιμοποιώντας κάποιο κατάλληλο αντιπαράδειγμα να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση δεν ισχύει:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$, ισχύει ότι $\alpha - \beta > \gamma - \delta$.

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

(α) Η παράσταση $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ είναι ίση με:

A. $\sqrt{10}$

B. 5

Γ. $\sqrt{5}$

Δ. $\sqrt{20}$.

(β) Αν $3 < x < 4$ τότε η παράσταση $\frac{|x-4|}{x-4} + \frac{|x-3|}{x-3}$ είναι ίση με:

A. 2 B. 0 Γ. 4 Δ. -2.

(γ) Αν $x = 0.25$ και $y = 4$, τότε η αριθμητική παράσταση $(x^3y^2)^2 : (xy^3)^{-1}$ είναι ίση με:

A. 1 B. -1 Γ. 4 Δ. -4.

Ασκήσεις

1. (α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

2. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $x + y$

(β) $2x - 3y$

(γ) $\frac{x}{y}$

3. Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2$, όπου x πραγματικός αριθμός.

(α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$, ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

(β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4.$$

4. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{|x + 1| + |x - 5|}{3}$.

5. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

(α) Να αποδείξετε ότι $A - B = 4$.

(β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}.$$

6. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(β') Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

7. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(β') Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}$

8. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \quad \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \qquad (β) \quad \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$

9. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y - 6| \leq 4.$$

(α') Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(β') Να βρεθεί η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογώνιου με διαστάσεις $2x$ και y .

10. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3 - \beta), \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(α') Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(β') Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α και β .

(γ') Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς $5, 9$ και x αντίστοιχα.

(α') Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

(β') Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα!!!

2021 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος!!!