Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας
6ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Δίνεται η εξίσωση

$$(\mu^2-9)\mathrm{x}+(\mu^2+3\mu)\mathrm{y}+\mu+1=0,\ \ \mu\in\mathbb{R}.$$

Η εξίσωση $\mathrm{A}\mathrm{x}+\mathrm{B}\mathrm{y}+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν δεν ισχύει $\mathrm{A}=0$ και $\mathrm{B}=0$.

Ευθεία ϵ: $\mathrm{A}\mathrm{x}+\mathrm{B}\mathrm{y}+\Gamma=0$, με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$. Ισχύει ότι:

$\triangleright \epsilon \parallel \mathrm{y'y} \Leftrightarrow \mathrm{B}=0$

$\triangleright \epsilon \parallel \mathrm{x'x} \Leftrightarrow \mathrm{A}=0$

$\triangleright$ *ϵ διέρχεται από $\mathrm{O} \Leftrightarrow \Gamma=0$.*

(α') Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

(β') Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη:

i. στον άξονα $\mathrm{x'x}$, ii. στον άξονα $\mathrm{y'y}$.

(γ') Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda(\mathrm{x}+\mathrm{y}-1)+2\mathrm{x}-\mathrm{y}-1=0,\ \lambda\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

(α') Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή που διέρχεται από σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

Ευθεία ϵ : $\mathrm{A}\mathrm{x}+\mathrm{B}\mathrm{y}+\Gamma=0$, με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$.

Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$ είναι παράλληλο στην ϵ.

Το διάνυσμα $\vec{\eta}=(\mathrm{A},\mathrm{B})$ είναι κάθετο στην ϵ.

(β') Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (1),

i. είναι παράλληλη στον άξονα $\mathrm{x'x}$,
ii. είναι παράλληλη στον άξονα $\mathrm{y'y}$,
iii. διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,-1)$,
iv. σχηματίζει με τον άξονα $\mathrm{x'x}$ γωνία 45^{o},
v. είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: -2\mathrm{x}+\mathrm{y}-1=0$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η ευθεία

$$\zeta: \mathrm{x}+\mathrm{y}+1=0,$$

δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που ορίζονται από την εξίσωση (1).

3. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon_1 : \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : \mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 4 = 0.$$

(α΄) Να βρείτε δύο διανύσματα $\overrightarrow{\delta}_1$ και $\overrightarrow{\delta}_2$ τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα.

(β΄) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2.

4. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : \lambda\mathrm{x} + (\lambda - 2)\mathrm{y} + 8 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : (\lambda - 1)\mathrm{x} + \lambda\mathrm{y} + \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, ώστε:

(α΄) $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$, (β΄) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

5. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(2\lambda - 1)\mathrm{x} + (18 - 11\lambda)\mathrm{y} + 9\lambda - 17 = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β΄) Αν ϵ_1, ϵ_2 είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

6. Δίνονται οι ευθείες:

$$\epsilon : 2\kappa\mathrm{x} - (1 + \kappa)\mathrm{y} + 1 - 3\kappa = 0 \quad \text{και} \quad \zeta : (1 + 3\kappa)\mathrm{x} + (\kappa - 1)\mathrm{y} + 2 - 6\kappa = 0, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

(α΄) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(β΄) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ και ζ.

7. Σε παραλληλόγραμμο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ οι πλευρές του AB και $\mathrm{A\Delta}$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις:

$$\epsilon_1 : 2\mathrm{x} + \mathrm{y} + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2 : \mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 6 = 0$$

αντίστοιχα.
Αν το κέντρο του $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι το σημείο $\mathrm{K}(-1, -2)$, να βρείτε:

(α΄) τις συντεταγμένες του σημείου A και να αποδείξετε ότι $\Gamma(0, -6)$,

(β΄) την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

¨Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα, καλή ή κακή, έχει ένα τέλος...εκτός από τα Μαθηματικά¨.
Erdos, Paul, $1913 - 1996$, Ούγγρος μαθηματικός.